OUGH
TRED
OPUS
CULA

N
III
2/7



N. III. 2
39354 | A 17

Lord W. Kerr, G.C.B.



Library, Brocket Hall.

GUILELMI OUGHTRED ÆTONENSIS,

Quondam collegii Regalis

In

CANTABRIGIA Socii.

Opuſcula MATHEMATICA hactenus inedita.



OXONII,

E THEATRO SHELDONIANO, *Anno* 1677.

PRÆFATIO.

Cum incidimus in Manuſcripta exemplaria Cl. Oughtredi, *viſi ſumus Tyronibus non inutilem operam, nec in Matheſi magis exercitatis ingratam præſtituri, ſi ex iis nonnulla Typis mandaremus, Quapropter cum alia eſſent mutila, alia prelo haud ita idonea, ea tantum excerpſimus, quæ propter uſum, & varietatem tum luce publica, tum* Oughtredi *nomine non indigna viderentur. Quorum pleraque cum eo animo ſcripſit, ut iis quos inſtitueret, ſubſervirent, non poſſunt juvenes melius hiſce ſtudiis initiari, quam ſi* Oughtredi *genio ſe aſſuefacerent. Qui, ſi quis alius, natus ad Matheſin videtur, & in exemplum perſpicacis animi, ſubactique judicii. Nemo ſiquidem magis perſpicua brevitate uſus eſt, aut penitius ipſas rerum eſſentias animo complexus, quas dum contemplatur, ſuas ſibi creare notitias, nec tam invenire veritatem, quam conſtituere videtur. Cujus rei magnum ſane exem-*

exemplum præbet Clavis Mathematica, *ubi accurato rerum examini, ſeveritati judicii, rigidæque veritati ita conſtanter aſſueſcit anima, ut diſcat non modo phantaſiæ viribus res pene infinitas uno intuitu comprehendere, ſed ultra humanum fere modum intelligere, & tarditatem diſcurſus prævenire: Nullibi magis ſincerus demonſtrandi guſtus hauritur, aut pari fructu, quæ homini propria, mentis agitatio aut ſolertia promovetur; nec aliunde pulchrior cogitationum ordinatio, aut habitus ſentiendi congrue fælicius ediſcitur. Præcipua Matheſeos utilitas, eſt ſevera mentis exercitatio, in omni ſtudio veritatis amor, & ex claritudine idearum orta ſerenitas; minuitur illius dignitas quoties ad ſenſibilia deſcendit; Infima Matheſeos pars eſt quæ hominum neceſſitatibus ſubvenit, aut ornamento inſervit; & ex humani generis uſibus parum æſtimatur. Autores iſti, qui prolixa ſua facilitate laborant, lectoribus faciunt contumeliam, & opinantes opus eſſe ut de omni prorſus re inſtruantur, oſtendunt methodum qua ipſi ſolent intelligere: perplexo implicari circuitu, & à recta aberrare via, eorum eſt qui in tenebris verſantur. Animus veritatis avidus ſupervacaneum omne*

ne

ne faſtidit, & ad rem ipſam properat; amat ſuas vires experiri, expetit difficultates, & ſine victoria delaſſari erubeſcit. Noluit Oughtredus *ſine fructu intelligi: ſatisque novit illam eſſe mentis humanæ indolem, ut velit aliquid ſibi, quod ipſa ſuppleat, relictum; & ita velle inſtrui, ut à ſe tamen diſcere videretur, & quibuſcunque uſa fuerit ſubſidiis, ipſam inventionem veritatis, ſibi ſoli deberi. Nonnulli Tractatuum quos nunc exhibemus, aliorum laboribus debentur, ſed majori legentium utilitate in compendium redacti; Theſauri enim quos ipſi Autores eruebant, ab* Oughtredo *accepere nitorem & uſum, qui nunquam quicquam alienum tractaverit, de quo non ipſe Author, maxime gloriaretur, ſi ut ſuum poſſet vendicare. In* Inſtitutionibus Mechanicis *ſi quid deſideretur, abundè ſuppleri poteſt ex accuratiſſimo Tractatu* Cl. Wallisii, *qui ſolus pro dignitate hanc partem Matheſeos tractavit, & de qua ſi cui poſtea ſcribere libuerit, ab illo mutuetur neceſſe eſt.*

Tra-

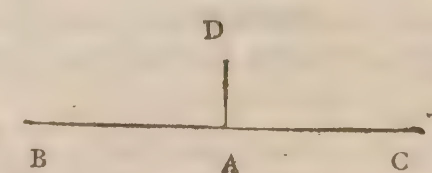
Tractatus qui ſequuntur, hi ſunt.

Inſtitutiones Mechanicæ.
De variis corporum generibus gravitate & magnitudine comparatis.
Automata.
Quæſtiones Diophanti Alexandrini *Lib. 3.*
De Triangulis planis rectangulis.
De Diviſione Superficierum.
Muſicæ Elementa.
De Propugnaculorum Munitionibus.
Sectiones Angulares.

Centrum gravitatis cujuſque corporis eſt certum punctum intra ipſum, circa ſe habens undiq; partes æqualium momentorum conſiſtentes, ſecundùm quod deorſum fertur, & à quo ſi grave appenſum linea concipiatur, dum fertur quieſcit, poſitionem quam initio habebat ſervans. Eſtque linea illa ſemper horizonti perpendicularis.

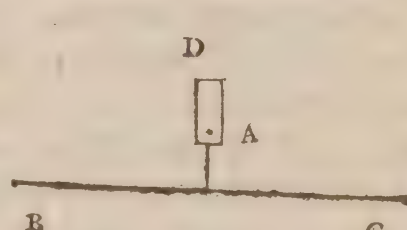
DE LIBRA.

LIBRA eſt BAC recta linea, cujus brachia ſunt AB, AC: quæ ſunt etiam diſtantiæ, ſive ſegmenta libræ à centro.



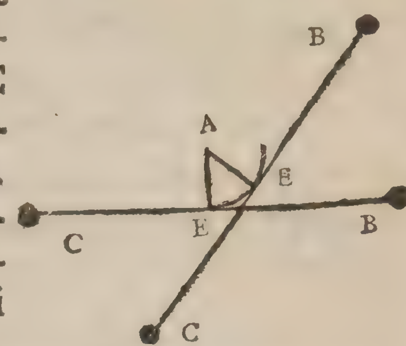
Centrum libræ A, ſive in libra ſit, ſive ſupra vel infra, eſt in linea perpendiculari ſemper ipſi libræ.

Trutina eſt DA horizonti perpendicularis.

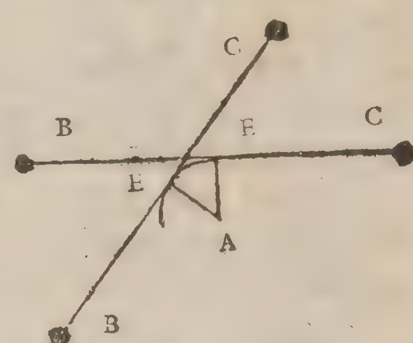


Prop. I. Si pondus in centro ſuæ gravitatis à recta ſuſtineatur linea, nunquam manebit niſi eadem linea horizonti fuerit perpendicularis.

Prop. II. Libra horizonti æquidiſtans, cujus centrum ſit ſupra libram, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à perpendiculo diſtantia habens pondera, ſi ab ejuſmodi ſitu moveatur, in eundem relicta redibit, ibique permanebit. Nam magnitudinis ex ponderibus B C & libra compoſitæ; centrum gravitatis eſt in E. quare (per I.) non ſuſtinebitur à perpendiculo AE, niſi ipſum etiam ſit horizonti perpendiculare.



Prop. III. Libra horizonti æquidiſtans cujus centrum ſit infra libram, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à perpendiculo diſtantia habens pondera, in hoc ſitu manebit: ſi vero ab ejuſmodi ſitu moveatur, deorſum relicta ſecundum partem decliviorem movebitur. Nam magnitudinis ex ponderibus B C & libra compoſitæ centrum gravitatis eſt E. [1] Quare per I. &c.

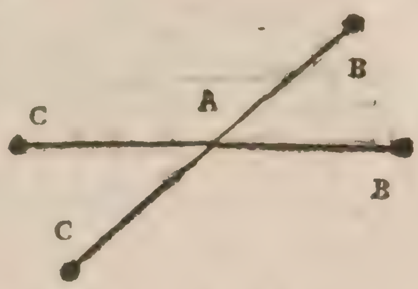


Prop. IV. Libra horizonti æquidiſtans, cujus centrum ſit in ipſa libra, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à centro diſtantia habens pondera, etiam ab ejuſmodi ſitu mota ubicunque relicta permanebit.

1 Secundum quod ex defin. grave deorſum fertur,

Nam

Nam magnitudinis ex ponderibus B C & libra compoſitæ centrum gravitatis eſt A: quare ab eo puncto appenſa quieſcet, poſitionem quam initio habebat ſervans, (per Definit.)

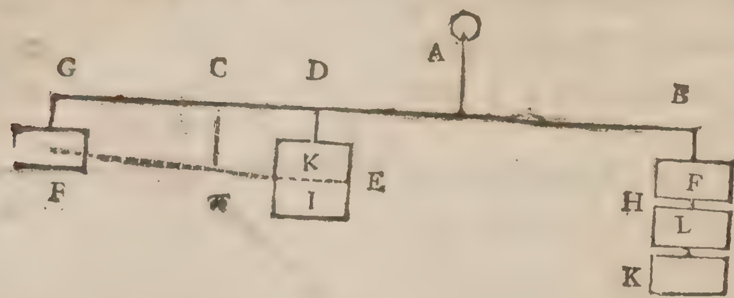


Similiter ſi pondera in libræ extremitatibus appendantur idem eveniet: dummodo ex ſuſpenſionum punctis ad centra gravitatum ponderum ductæ lineæ (quocunq; modo moveatur libra) ſi protrahantur, in centrum mundi concurrant. Ubi enim pondera hoc modo ſunt appenſa, ibi graveſcunt, ac ſi in iiſdem punctis centrum gravitatum haberent. Huic propoſitioni adverſantur *Jordanus* de ponderibus; *Hier. Cardanus* de ſubtilitate. *Nic. Tartalea* de quæſitis ac inventionibus; quorum opiniones prolixa confutatione *Guidus* in hâc 4. prop. refellit.

Prop. V. Duo pondera EF in libra ex punctis D G appenſa, ſi libra illa intercepta ita dividatur in puncto C, ut ſegmenta ponderibus reciprocè reſpondeant (hoc eſt ſi fiat GC. DC : : E. F) æquiponderabunt ex ipſis punctis acſi utrumque ſimul E + F ex puncto diviſionis C ſuſpendatur. Eſto A centrum libræ, & ſumatur AB = AC. ſunt hi tres caſus.

Caſus I. Eſto utrumque punctum D G ex eadem parte centri A

[1] Fiat AB. AG : : F.H } æquiponderant.
Et AB. AD. : : E. K } p. 6. 1. Archim.



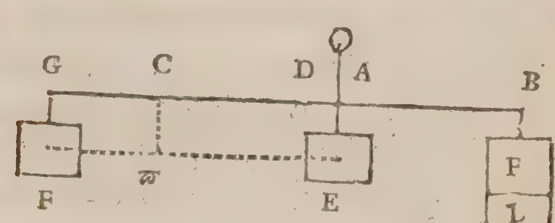
Dico H + K = E + F;
Ideoq; E + F ex C æquiponderare ipſis H+K ex B.
Nam dividatur H in F + L & E in K + I : probetur I = L.

[2] Erit AG — AB.AB : : H—F.F : hoc eſt GC.AB :: L. F.

[3] Et AB—AD.AB:: E—K.E:hoc eſt DC.AB:: I. E
at [4] G C. DC : : E . F

[5] Quare GC.AB::I.F.Eſt igitur [6] I = L.Ergo &c.

Caſus. 2. Eſto punctum D in Centro A.



Fiat AB. AG : : F. H.

1 Proinde F. > H. & E < K. per Schol. 14. E. 5
2 Ex conſtruct. primâ invertendo & dividendo.
3 Ex conſt. ſecundâ dividendo converſim.
4 Ex hypotheſi.
5 Ex æquo perturbatè.
6 Per 9. E. 5.

Dico

Dico H = E + F Ideoq; E + F ex C. æquiponderare ipſi H. appenſo ex B.

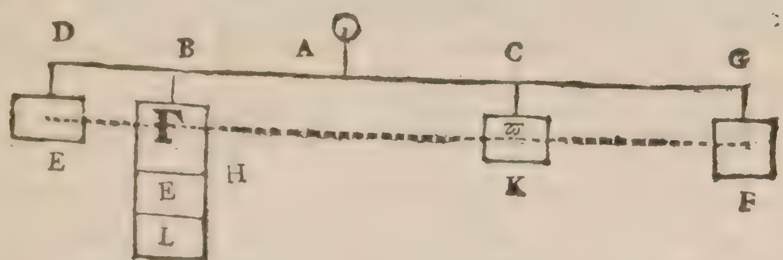
Nam dividatur H in F + L: probetur L = E

[1] Erit GC. AB :: L. F at [2] GC. DC :: E. F.

[3] Quare DC. AB :: L.E. Eſt ergo [4] L = E. Ergo.

Caſus III. Eſto punctum D ex altera parte centri A.

Fiat AB. AD :: E. K. } æquipond.
Et AB. AG :: F. H. }



Dico H—K = E + F : Ideoque E + F ex C æquiponderare ipſi H--K nempe H -L ex B.

Nam dividatur H in F + E + L. probetur L = K.

[5] Erit DC. AB :: E + K.E : Et [6] GC.AB :: E + L. F. (E + L = H--F)

at GC. DC. :: E. F.

[7] Quare DC. AB :: E + L. E :: E + K. E.

Igitur erit [8] L = K. Ergo demtis LK. &c.

1 Ut in caſu primo.
2 Ex Hyp.
3 Invertendo analogiam ſecundam & ex æquo perturbatè.
4 Nam DC = AC = AB. ex. Hyp. caſus 2. & conſtructione propoſ.
5 Ex Analogiâ primæ conſtru. invertendo, & componendo.
6 Ex Analogia 2. Conſt. invertendo, & dividendo.
7 Ex æquo purturbatè.
8 Per 9. E. 5. & 3. ax. E. 1.

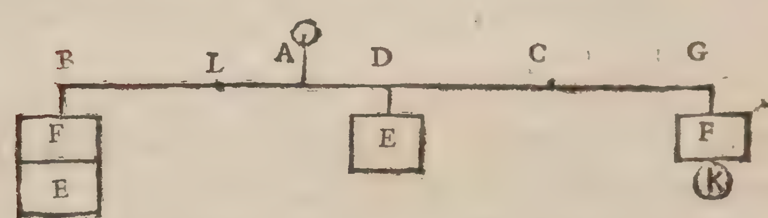
Probe-

Probetur H $\prec$ E + F :[1] E + F. F :: DG. DC :: AG + AD. AB. + AD $\doteq$ [2]
H. F.

Aliter demonſtrari poterunt ſinguli Caſus per centrum gravitatis ϖ inventum per 6. 1. Archimedis de æquiponderantibus.

Prop. VI. Si in libra BAC pendente è centro A ſuſpendantur ad puncta D G utrinque à C æquidiſtantia duo æqualia pondera EF, ſegmenta libræ è centro, ponderum ſuſpenſorum gravitatibus ſunt directe proportionalia: hoc eſt ut AD ad AG, ſic gravitas E ad gravitatem F.

Nam fiat AG. AL (AD) :: E. K. quare (per 6, 1.



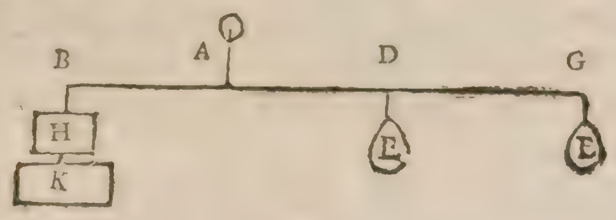
Arch. de æquipond.) E appenſum ad D vel L habebit ad gravitatem F; ſed K appenſum ad G gravitatem eandem F habebit. Ergo E appenſum ad G tanto ponderat gravius quam ad D, quanto F majus eſt quam K: vel quanto ſpatium AG majus eſt ſpatio AD.

Aliter demonſtratur ſic per 6, 1. Archim. de æquiponderantibus.

1 Componendo. Nam GC. DC :: E. F. ex hyp.
2 Per. 33. E. 5.

diſtat,

Eſt AB. AD : : E. H } æquipond.
Et AB. AG : : E. K }



[1] Ergo AD. AG : : H. K

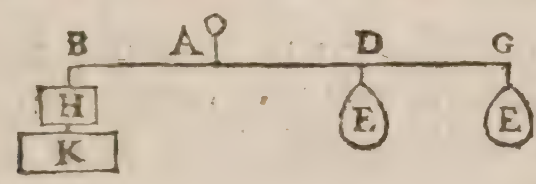
Corollarium. Quo pondus à centro libræ magis diſtat, eo gravius eſt; & per conſequens velocius movetur.

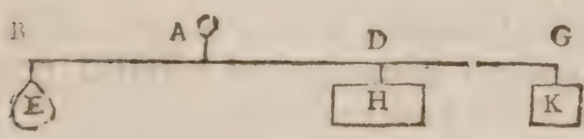
Atque hinc ratio Stateræ, qua ponderum gravitates notæ redduntur, facile oſtendetur. Eſto Stateræ ſcapus BAG, cujus trutina ſive centrum ſit A; appendiculum E.

Uſus Stateræ poteſt eſſe duplex.

Nam primò appendiculum erit mobile in Stateræ brachio A G, & pondus appendetur ad B.

Dico gravitatem ponderis H ad gravitatem ponderis K eſſe ut AD. AG. Nam gravitas ponderis H





æquatur gravitati ponderis E appenſi in D : & gra-

[1] Invertendo primam analogiam, & ex æquo ordinatè.

vitas

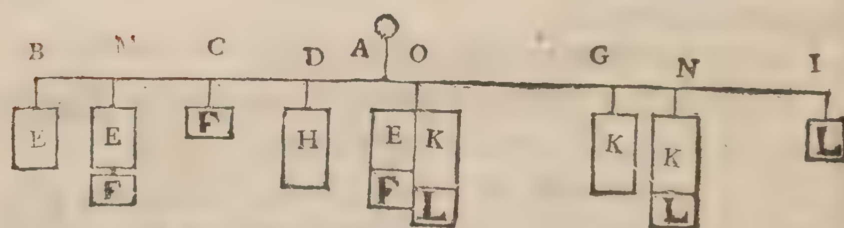
vitas ponderis K æquatur gravitati ponderis E appenſi in G. Vel ſecundò appendiculum erit immobile in B : & pondera inæqualia H K. Dico H ad K eſſe ut AG. AD.

Nam cum pondera H E æquiponderent, item pondera K E.

Erit H. E :: AB. AD. Et K. E :: AB. AG. [1] Ergo.

Prop. VII. Quotcunque datis in libra ponderibus EFHKL ubicunque appenſis puta ex punctis BCDGI, centrum libræ A invenire, ex quo ſi ſuſpendatur libra, data pondera maneant.

Dividatur BC in M ſic ut BM. CM :: F E.



Deinde dividatur GI in N ut GN. NI :: L. K. Iterum dividatur MN in O, ut MO. NO :: KL.EF. Poſtremò dividatur DO in A, ſic ut DA. AO :: EFKL. H.

Eſt igitur punctum A centrum gravitatis magnitudinis compoſitæ ex omnibus EFHKL ponderibus ad eadem libræ puncta ſuſpenſis.

[1] Ergo H. K :: AG. AD. invertendo ſecundam analogiam & ex æquo perturbatè.

Ha-

Habeant brachia libræ proportionem non æqualitatis, ſed aliam quamlibet puta 3 ad 1: Quare pondus 1 appenſum ad finem longioris brachii æqueponderabit ponderi 3 appenſo ad finem brevi-



oris. Jam vero utrique 3 & 1 apponatur æquale pondus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & ſic pondera brevioris fient 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. & pondera longioris 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

Brachium libræ longius graveſcet. Exceſſus autem gravedinis illius ſupra alterum, invenietur dividendo rationem ponderum in æqualitate reſpondentium, nempe $\frac{3}{1}$ per rationem ponderum auctorum $\frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}, \frac{9}{7}, \frac{10}{8}, \frac{11}{9}, \frac{12}{10}$ &c. Quotus ſive ratio exceſſus longioris brachii ſupra brevius orietur, $\frac{3}{2}, \frac{0}{5}, \frac{2}{1}, \frac{15}{7}, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}, \frac{12}{5}, \frac{27}{11}, \frac{5}{2}$ &c. (ſic $\frac{12}{0}$) $\frac{3}{1}$ ($\frac{5}{2}$) quare ſi in fine brevioris brachii ſit 6 (3 + 3) & in fine longioris 4 (1 + 3): gravitas longioris erit ad gravitatem brevioris, ut 2 ad 1, hoc eſt dupla. Et ſi in fine brevioris brachii ſit 12 (3 + 9) & in fine longioris ſit 10 (1 + 9): gravitas longioris erit ad gravitatem brevioris, ut 5 ad 2, hoc eſt dupla & ſeſquialtera. Et ſimiliter de reliquis.

Confect. Gravitas longioris brachii augetur ſuper gravitatem brevioris, tum propter majorem brachi-

orum in æqualitatem, tum propter gravitatem majorem utrique æqualiter appoſitam.

Brevius } 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. $+ \frac{3}{1} = \frac{4}{2}.\ \frac{5}{3}.\ \frac{6}{4}.$
Longius }

$\frac{7}{5}.\ \frac{8}{6}.\ \frac{9}{7}.\ \frac{10}{8}.\ \frac{11}{9}.\ \frac{12}{10}\ )\ \frac{3}{1}\ (\ \frac{3}{2}.\ \frac{9}{5}.\ \frac{2}{1}.\ \frac{15}{7}.\ \frac{9}{4}.\ \frac{7}{3}.\ \frac{12}{5}.\ \frac{27}{11}.\ \frac{5}{2}$ &c.

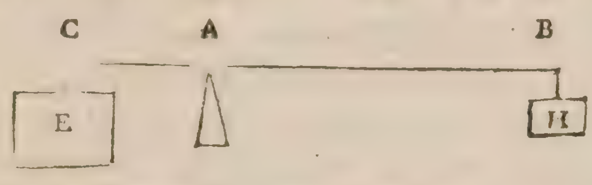
Sic $\frac{6}{3}.\ \frac{7}{4}.\ \frac{8}{5}.\ \frac{9}{6}.\ )\ \frac{5}{2}\ (\ \frac{5}{4}.\ \frac{10}{7}.\ \frac{25}{16}.\ \frac{5}{3}.$

DE

DE VECTE.

Prop. I. Potentia in B ſuſtinens pondus E vecti BAC appenſum, & ipſum pondus, ſegmentis vectis à fulcimento A ſunt reciproce proportionalia. Dico AB.AC :: E. potentia in B ſuſtinens pondus E.

Nam fiat AB. AC : : E. H. æquepond. quare potentia æqualis ipſi H conſtituta in B æquiponderabit

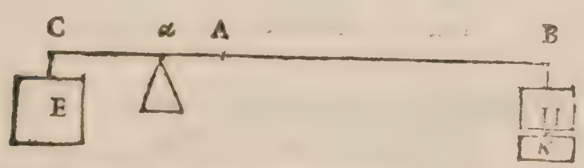


ipſi E : hoc eſt prohibebit ne deorſum vergat. At hoc præſtat potentia præſuppoſita in B. Ergo.

Coroll. 1. Pondus quo fulcimento propius eſt, eo minore ſuſtentatur potentia.

Nam fiat AB. AC : : E. H.

Et αB. αC : : E. K.



[1] Et quia αB. αC $\overline{\cdot\cdot}$ AB. AC.

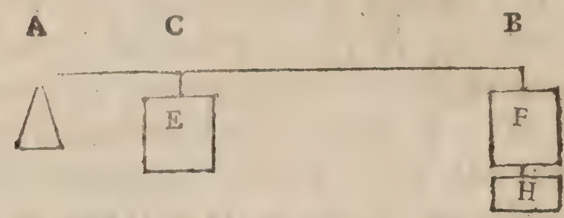
Erit E. K $\overline{\cdot\cdot}$ E. H. Ergo [2] K. $\lhd$ H.

Prop. II. Si pondus E inter fulcimentum & potentiam in B ſuſpendatur : potentia in B ſuſtinens pondus E, & ipſum pondus, ſegmentis vectis à

1 αB. αC. $\overline{\cdot\cdot}$ AB. αC. $\overline{\cdot\cdot}$. AB. AC. per. 8. E. 5.
2 10. E. 5.

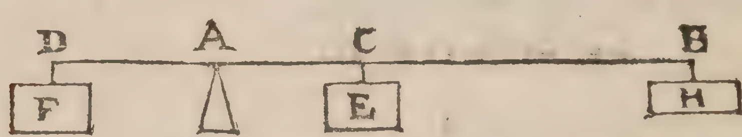
fulcimento A ſunt etiam reciprocè proportionalia. Dico AB. AC : : E. potentia in B.

Nam appendatur ex B pondus F = E. [1] Erit AB,



AC : : gravitas F ex B. E ex C. Fiat AB. AC : : pondus E. H : item gravitas : quare F ex B. E ex C : : F ex B. H ex B. æquiponderabit ergo E ex C, & H ex B. Et potentia B = ipſi H. Nam potentia æqualis ipſi H poſita in B, ſuſtinebit ipſum H, ne decidat, quare & ſuſtinebit ipſum E appenſum ex C. ergo.

Coroll. 2. Potentia in B ſemper minor eſt pondere E. Aliter demonſtratur ſic. Fiat AD = AC.



Et ex D ſuſpendatur pondus F = E. Et fiat AB. AD : : F. H. [2] Reliqua ſunt facilia.

Coroll. 3. Si ſint duæ potentiæ, una in B, altera in D : & utraque ſuſtentet pondus appenſum ex A : erunt potentiæ ſegmentis vectis ab A reciproce proportionales : hoc eſt AB. AD : : F. H : & po-

1 Per. 6. libræ.

2 F. E } æquipond. ergo etiam. E. H. æquiponderabunt. Quare.
F. H } Potentia B. = H. &c. ut in priori demonſt.

tentia

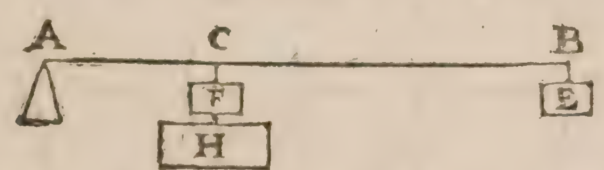
tentia in B puncto remotiore ab A minor eſt potentia in D puncto propiore.

Coroll. 4. Utraque potentia ſimul ſumta æquatur ponderi appenſo ex A.

Nam [1] DB.DA::A.H }
Et BD. BA :: A, F } [2] Ergo DB. DB:: A.H+F.

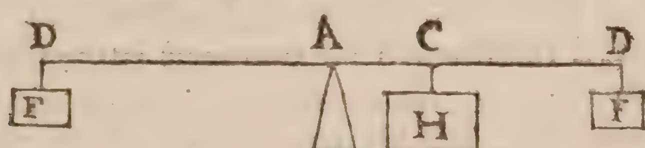
Prop. III. Si pondus E ex altero fine B appendatur, potentia in C ſuſtinens pondus E, & ipſum pondus ſegmentis libræ à fulcimento ſunt reciproce proportionalia.

Dico AB. AC : : potentia in C.E. Nam fiat F=E.



& AB. AC : : H. E. gravit. at AB. AC :: [3] gravitas E ex B. F ex C. æquiponderant igitur E ex B. & H ex C.

Ponatur in C Potentia ſuſtinens pondus H : erit igitur æqualis ipſi H. Quare eadem potentia ſuſtinebit pondus H. Ergo &c.



Aliter demonſtratur ſic. Fiat AD=AB : & pondus E=F. Et AD. AC : : H. F. æquipond. Reliqua ſunt facilia.

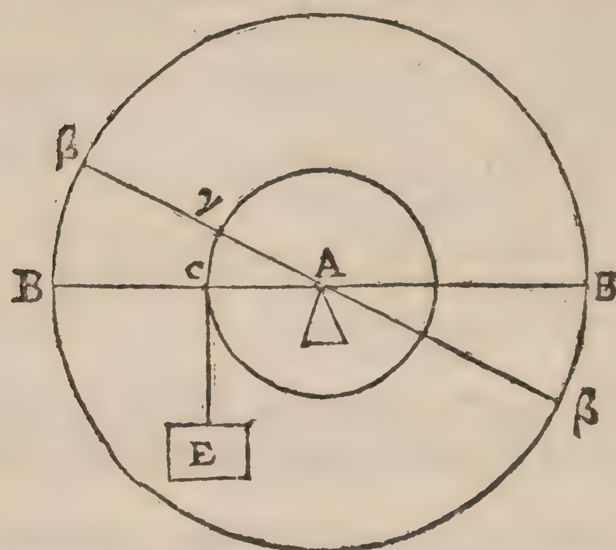
1 Utraque per propoſ.
2 Per 12. E. 5. alternando terminos.
3 Per. 6. libræ.

Coroll. V.

Coroll. V. Quo pondus E propius eſt fulcimento A, eo minor potentia in C ipſum ſuſtinebit.

Coroll. VI. Potentia in C ſemper major eſt pondere E.

Prop. IV. S potentia in B moveat pondus E vecti appenſum ex C puncto; Erit ut Bβ ſpatium



potentiæ motæ ad Cγ ſpatium ponderis moti, ſic diſtantia AB à fulcimento ad potentiam, ad diſtantiam AC à fulcimento ad ponderis ſuſpenſionem.

Nam circulorũ circumferentiæ ſunt ut diametri.[1]

Coroll. VII. Ex his manifeſtum eſt Bβ ſpatium potentiæ motæ, ad Cγ ſpatium ponderis moti majorem habere proportionem quam pondus E ad eandem potentiam in B.

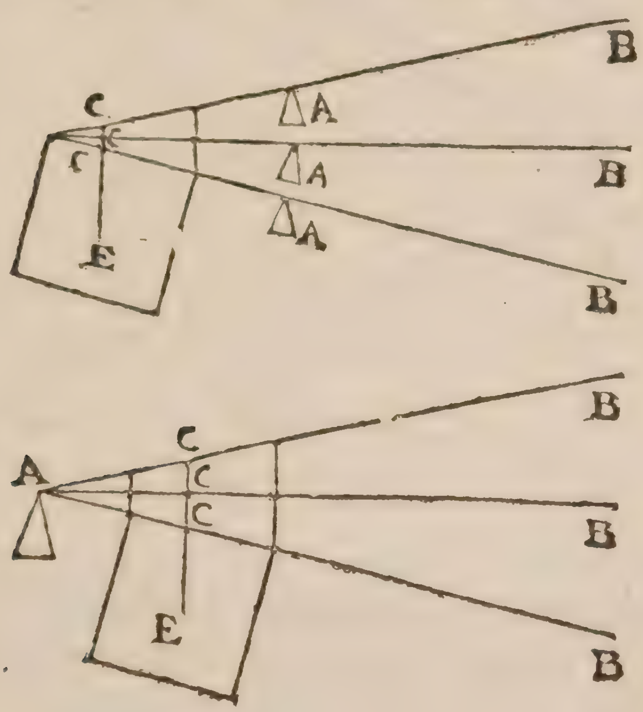
Nam potentia in B movens pondus E neceſſariò

1 Et etiam radii per 15. E. 5. ſed arcus ſimiles (quales ſunt Aγc. ABβ. per 3. cor. 33. E. 6.) ſunt ut circumferentiæ.

major

major eſſe debet quam potentia ſuſtinens tantum.
¹ At vero AB.AC:: E. potentia in B ſuſtinens. Ergo.

Prop. V. Potentia in B vecte ſuſtinens pondus E (cujus centrum gravitatis eſt E) ad ipſum pondus eandem habebit proportionem quam diſtantia AC inter fulcimentum & punctum interſectionis lineæ è centro gravitatis perpendicularis plano hori-



zontis cum vecte, ad diſtantiam AB inter fulcimentum & potentiam.

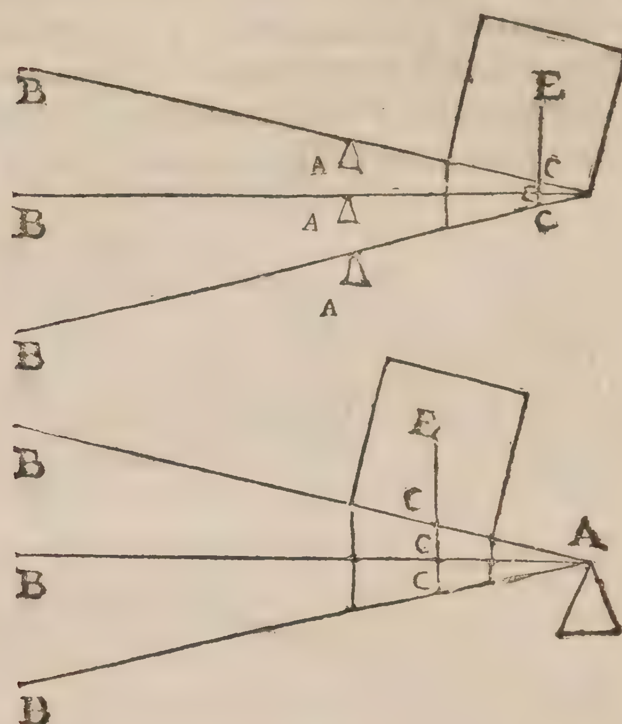
Dico AB. AC :: E. potentia in B.

Nam per ea quæ à Fed. Command. demonſtrantur in 6 propoſ. Archim. de quadra. parabolæ, ſi

¹ Per. 1. de vecte.

ponderis

ponderis E ſuſpenſiones ad vectem ſolvantur reli-

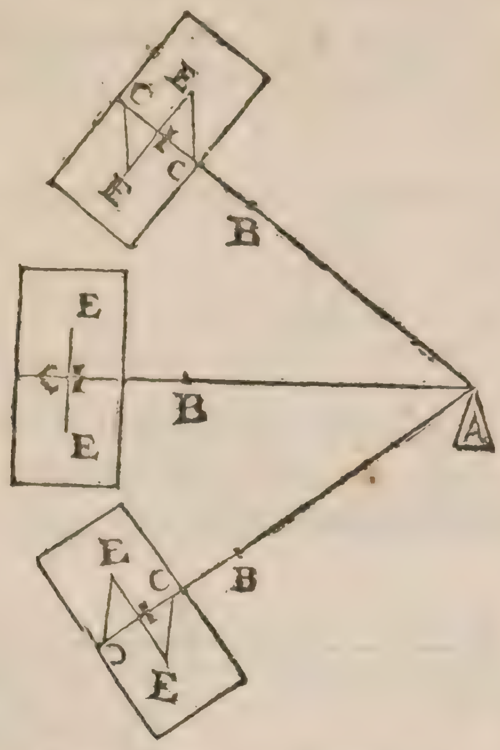


quæ, ipſum tamen pondus ex Puncto C appenſum, eodem modo manebit, ſicut nunc manet.

Prop. VI. & VII. Lemmata ſunt faciIlima, ideoque omittenda cenſui.

Prop. VIII. IX. & X. Potentia in B pondus in E ſuſtinens vel etiam movens, ſi centrum gravitatis ſupra vectem horizonti æquidiſtantem habeat, quo magis pondus ab hoc ſitu vecte elevabitur, majore egebit potentia, quo magis deprimetur, minore. At ſi centrum gravitatis in ipſo vecte habeat,

beat, ſive elevabitur ſive deprimetur, eadem ſemper potentia opus erit.



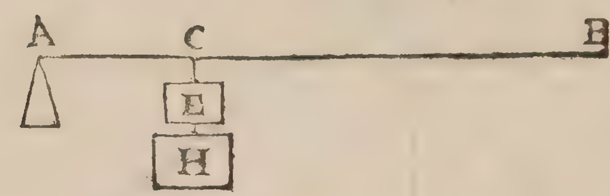
Ratio ſequitur ex Prop. 5. & ex habitudine duarum rectarum EI, EC è centro gravitatis quarum una eſt perpendicularis vecti, altera plano horizontis.

Coroll. VIII. Hinc facile elicitur, quod in omnibus vectis ſitibus potentiæ in B ſuſtinentes pondus, eandem ſemper ad ſe invicem rationem habeant quam diſtantiæ AC in iiſdem ſitibus.

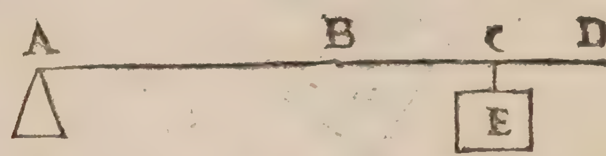
Prop. XI. Si vectis diſtantia AB inter fulcimentum & potentiam ad diſtantiam AC inter fulcimentum & punctum, ubi à centro gravitatis ponderis

E ducta perpendicularis horizonti vectem ſecat; majorem habuerit rationem quam pondus ad potentiam; pondus à potentia movebitur.

Hoc eſt ſi AB. AC ⌐ E. potentia in B. Nam fiat AB. AC :: H. potentia in B. [1] Quare pondus H



majus eſt pondere E. [2] at potentia in B ſuſtinet pondus H. Ergo potentia in B pluſquam ſuſtinebit, hoc eſt movebit pondus E.



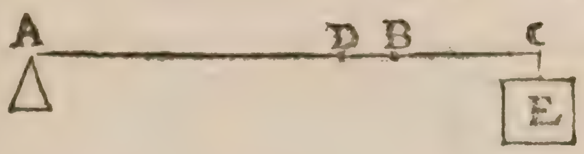
Aliter demonſtratur ſic Fiat. AB. AD :: E. potentia in B. at AB. AC ⌐ E. potentia in B. [3] Quare diſtantia AD major eſt diſtantia AC. [4] At potentia in B ſuſtinet pondus E ex D: Ergo per Corol. 5. Prop. 3. pluſquam ſuſtinebit pondus E ex C.

Prop. XII. Datum pondus E à data potentia in B dato vecte ABC movere. Eſto datum pondus ut 3; & data potentia ut 5; quæ poſita ſit inter fulcimentum A & punctum ſuſpenſionis C:

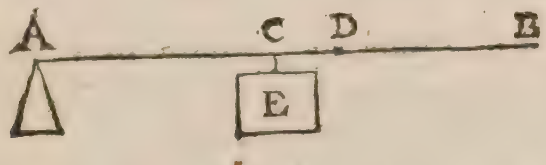
1 10. E. 5. 2 1. hujus. 3 10. E. 5. 4 3. hujus.

In

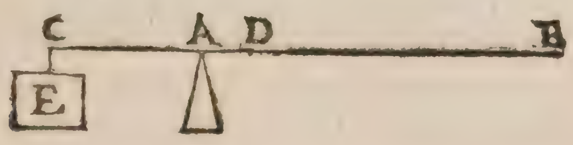
In hoc caſu: Dividatur AC in D ut AD. AC :: .5.



In ſecundo caſu. Dividatur AB in D, ſic ut AB. AD :: 5. 3.



In tertio caſu, Dividatur CB in D ſic ut DB. DC :: 5. 3.

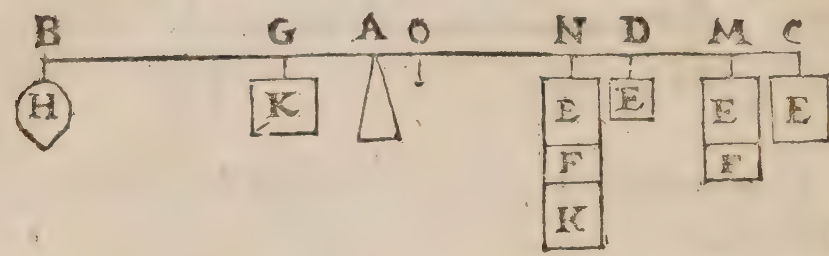


Tum quia in [1] ſingulis caſibus punctum D inventum æquat potentiam ponderi : ſumendum eſt juxta D punctum aliud in quo pondus fiat levius, per Prop. 11.

Prop. 13. Quotcunque datis in vecte ponderibus EFK ubicunq; appenſis, puta ex punctis CDG, datoque A fulcimento potentiam invenire, quæ in dato puncto B data pondera ſuſtineat.

[1] Per. 3. 2. 1. hujus.

Fiat E. F. : : MD. MC. tum EF. K : : NG. NM. Et AB. AN : : EFK. H potentia.[1]

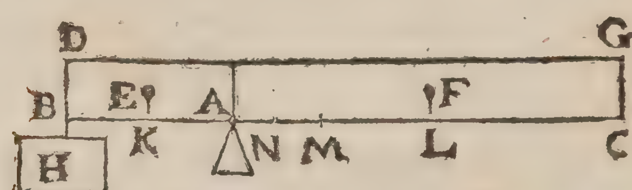


Prop. 14. Quotcunque data in vecte pondera EFK ubicunque appenſa, puta ex punctis CDG, à data H potentia in B movere.

Fiat E. F : : MD. MC. Tum EF. K : : NG. NM. Et EFK. H : : AB. AN.

Poſtremò inter A & N ſtatuatur fulcimentum O.[2]

Prop. XV. Quia dum pondera vecte moventur vectis quoque gravitatem habet : Oſtendendum & quomodo inveniatur potentia, quæ in dato puncto datam vectem ſuper datum fulcimentum A ſuſtineat.



Eſt vectis BCDG, & partis vectis AD centrum gravitatis E : partis autem AG centrum gravita-

[1] Quæ data pondera ſuſtinebit. per 5. libræ. & 1. hu. [2] 11. hu

tis

tis F. E quibus rectæ perpendiculares horizonti ducantur EK FL. Suntque partes illæ vectis quaſi duo pondera ex punctis KL appenſa.

Dividatur KL in M, ut KM. ML : : AG. AD. [1] Jam ſi potentia collocanda ſit in puncto B. Fiat AB. AM : : AD + AG. [2] potentia in B. Si vero potentia collocanda ſit in puncto C. Fiat AC. AM :: AD + AG. [3] potentia in C.

Item ſi pondus H vecti appendatur ex puncto B : potentiaque ponenda ſit, ita ut vectem unà cum pondere ſuſtineat.

Invento ut prius puncto M.

Dividatur BM in N, ut BN. NM :: AD + AG.H.

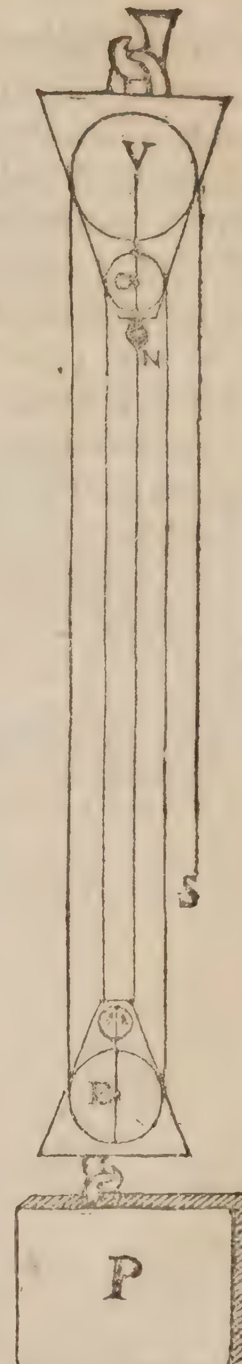
Tum ñat AC,AN :: AD + AG + H.potentia in C.

Vel fiat AB. AN : : AD + AG + H. potentia in B.

1 Quare per 5. libræ, utrumque ſimul ex M. æquiponderabit, ac ſi ex punctis K. L. ſuſpendantur ſeorſim. 2 Quæ ſuſtinebit vectem per. 1. hu. 3 Quæ ſuſtinebit vectem. per 2. hu.

DE

DE TROCHLEA.



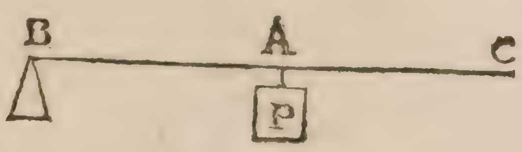
Sit pondus P quod plano horizontis ad rectos angulos ſurſum ſit attollendum. Et (ut fieri ſolet) Trochlea duos habens orbiculos, quorum axiculi ſint OV, ſuperne appendatur: & altera trochlea duos etiam habens orbiculos, quorum axiculi ſint AE, infernè ponderi alligetur: ac per omnes utriuſque trochleæ orbiculos circumducatur funiculus, qui in altero ejus extremo, puta in N, nodo religetur. Potentia autem ſuſtinens ſive movens ponatur in S: quæ dum deſcendit, pondus ſurſum ex adverſo attollatur.

Problemata demonſtranda. 1. Quomodo hoc Trochleæ inſtrumentum reducatur ad vectem. 2. Cur magnum pondus ab exigua virtute. 3. Et quomodo, 4, quantoque in tempore moveatur. 5. Cur funis in uno capite debet eſſe religatus. 6. quodque ſuperioris, 7 quodque inferioris trochleæ ſit officium. 8. Et quomodo omnis in numeris data

propor-

proportio inter potentiam & pondus inveniri poſſit.

Lemma. Sit vectis CB bifariam diviſus in A, cujus fulcimentum ſit B: & ſit potentia in C, ſuſtinens pondus appenſum ex A: Dico potentiam in C æqualem eſſe reſiſtentiæ fulcimenti: & utramque ponderis eſſe ſubduplam. Eſt enim [1] BC.



BA :: P. potentia in C. at BA = ½ BC. Et quia potentia in C una cum fulcimento in B ſuſtinet pondus P: potentia autem in C eſt ponderis ſubdupla, neceſſe eſt ut fulcimentum in B ſaltem æqualiter reſiſtat ponderis gravitati: alioquin ſuſtineri pondus non potuerit, ſed deorſum movebitur. Sufficit autem ad ponderis immobilitatem ut æqualiter ipſi potentiæ reſiſtat. Ergo fulcimenti reſiſtentia eſt etiam ponderis ſubdupla. Et graveſcit pondus ſuper fulcimento æqualiter dimidio ſui.

Aliter ſic. Loco fulcimenti ponatur in B potentia, una cum potentia in C, ſuſtinens pondus P: [2] utraque ponderis dimidium ſuſtinebit.

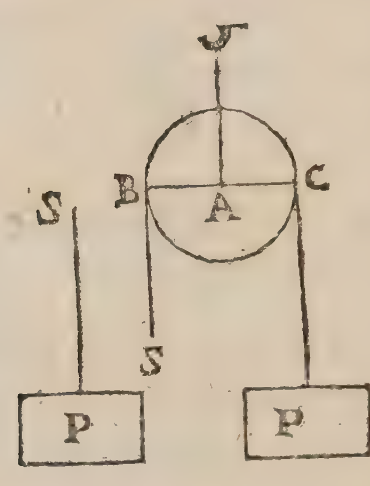
Prop. I. Si funiculus Trochleæ ſuperne appenſæ orbiculo circunducatur, alterumque ejus

1 Per 2. hujus. 2 Per 2. 3. corol. 2, hujus.

extre-

extremum ponderi alligetnr, alterum à potentia pondus ſuſtinente teneatur: erit potentia ponderi æqualis: poteritque idem pondus ab eadem potentia abſque trochleæ hujus auxilio nihilominus ſuſtineri.

Nam quia rectæ CP BS ſunt plano horizontis [1] perpendiculares, tanguntque orbiculum in CB,

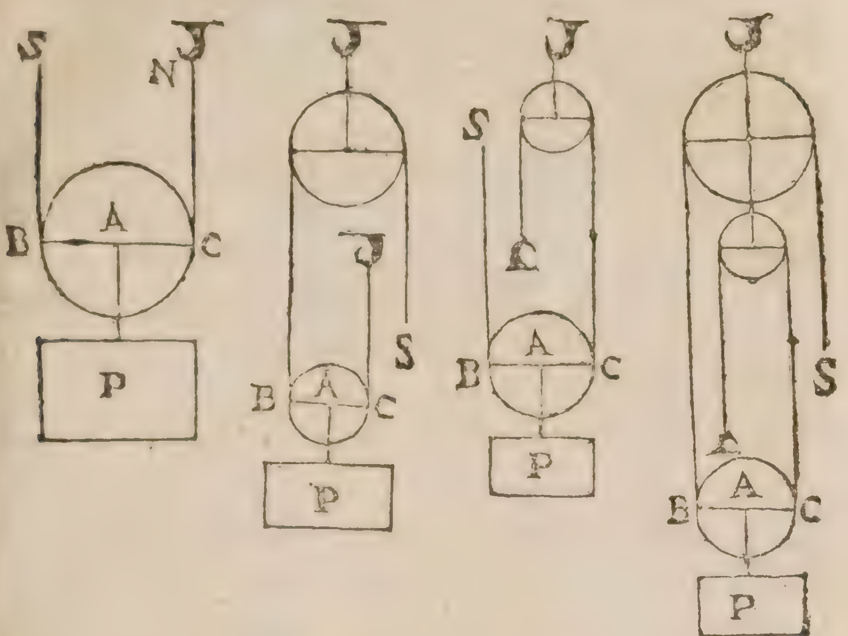


diameter CAB erit [2] parallela horizonti. Eſtque diameter CAB quaſi vectis, habens fulcimentum in centro A. Itaque cum diſtantia AC = AB: potentiaque in S, hoc eſt in B, ponderi P appenſo ex C [3] æquiponderet: erit potentia in S æqualis ponderi P. Ideoque ipſum abſque Trochlea ſuſtinebit.

1 Ex hyp. 2 Per 18. E. 3. & 28. E. 1. 3 Per 1. Vect.

Prop. II.

Prop. 2. & 3. Si funiculus Trochleæ ponderi alligatæ orbiculo circumducatur, alterumque e-



jus extremum alicubi in N religetur, alterum à potentia pondus ſuſtinente detineatur (ſive adhibeatur Trochlea ſuperior ſive non adhibeatur) erit potentia ſuſtinens ponderis ſubdupla.

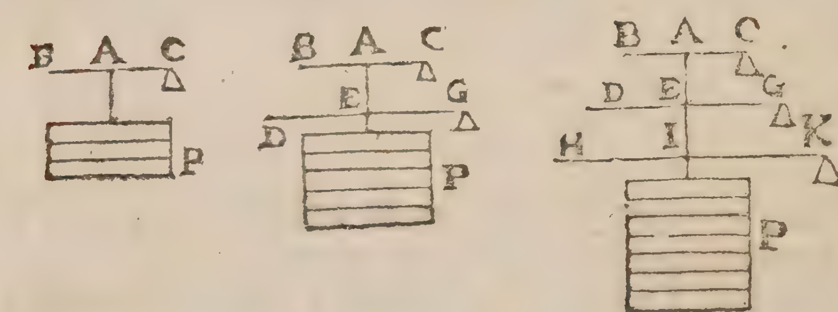
Ratio patet ex Lemmate præmiſſo. Nam cum potentia in S vel B trochlea pondus P ſuſtinere debeat, funiculum ex altero extremo religatum eſſe oportet, puta in N: ita ut N æqualiter ſaltem potentiæ in S vel B reſiſtat: alioquin potentia in S nullatenus pondus ſuſtinere poſſet. Eſtque BAC tanquam vectis: cui inſtar fulcimenti eſt

punctum C, exiſtente funiculo NC immobili: pondus autem ex A appenſum, quia trochlea ſuſtinetur axiculo A, ideoque pondus P in eodem quoque axiculo ſive centro ponderabit.

[1] Quare BC. CA : : P. potentia in B vel S. At CA = $\frac{1}{2}$ BC.

Nec Sane differentiam aliquam in ratione facit ſuperior Trochlea, in tribus poſterioribus Schematibus: ſicut ex prop. 1. apparebit.

Prop. IV. & VIII. Si ſit unus vectis vel plures, BAC, DEG, HIK, bifariam diviſi, in AEI, quorum fulcimenta ſint CGK, Et pondus P appenſum ex mediis punctis AEI, ſintque plures



potentiæ æquales; una in mediis illis punctis tanquam uno, reliquæ in ſingulis terminis BDH, pondus ſuſtinentes: Dico unamquamque ex dictis potentiis ſeorſim ponderis eſſe ſubmultiplicem denominatione compoſita ex unitate & totidem binariis quot ſunt vectes, hoc eſt ſi unus ſit vectis eſſe ſubtriplam: ſi duo ſunt vectes

1 Per 2. Vect.

eſſe

eſſe ſubquintuplam : ſi tres ſubſeptuplam, &c.

Nam cum potentia in medio vectium ſuſtineat unam partem denominativam ponderis : ſitque potentia æqualis in extremo duplo fortior quam in medio, quoniam eſt [1] CA. CB : : potentia in B. potentia in A : ſingulæ potentiæ in extremis ſuſtinebunt binas ejuſmodi partes. Ergo.

Prop. VI. Si ſint plures vectes BAC DEG HIK, bifariam diviſi in AEI, quorum fulcimenta ſint CGK & pondus P appenſum ex mediis punctis AEI, ita ut ex omnibus æqualiter ponderet, ſintque potentiæ æquales in ſingulis terminis BDH pondus ſuſtinentes : Dico unamquamque ex dictis potentiis ſeorſim ponderis eſſe ſubmultiplicem denominatione dupla numero vectium, hoc eſt ſi duo ſint vectes eſſe ſubquadruplam, ſi tres ſubſextuplam. &c.

Nam CA. CB : : potentia in B. pars ponderis quam ſuſtinet.

Et GE. GD : : potentia in D. pars ponderis quam ſuſtinet.

Et KI. KH : : potentia in H. pars ponderis quam ſuſtinet.

At vero potentiæ ſunt inter ſe æquales, & ſubduplæ ad partem ponderis quam ſuſtinent (ut ex proportionibus patet :) Quare unaquæque potentia ſuſtinebit trientem ponderis, & æquivalet ſextanti.

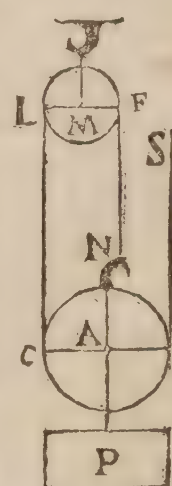
1 Per 2. Vect.

Poterat quidem hæc propoſitio commode conjungi cum 2 præcedentibus.

Prop. V. & IX. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne ſuſpenſa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum inferiori trochleæ religatur, alterum à potentia pondus ſuſtinente detinetur: erit potentia ponderis ſubmultiplex denominatione compoſita ex unitate & totidem binariis, quot ſunt in inferiori trochlea orbiculi, hoc eſt ſi unus ſit orbiculus, ſubtripla; ſi duo ſint orbiculi, ſubquintupla; ſi tres ſubſeptupla, &c. Ratio ſequitur ex 4 & lemmate.

Nam funiculus FN eſt ut potentia ſuſtinens orbiculum ac ſi in A centro eſſet: & potentia in S ac ſi eſſet in B.

Eſt igitur BAC tanquam vectis cujus fulcimentum C.



pondus vero P appenſum ex A à duabus potentiis una in centro altera in B æqualiter ſuſtentatur. In Superiori enim trochlea diameter FML eſt tanquam vectis habens fulcimentum in axiculo ſive centro M. Ideoque pondera F & L ſuſtinet æqualia: & tam ſuſtinet FN quam LC. Deinde quoniam ex medio vecte BAC pondus P ſuſpenditur, idcirco potentiæ in BC pondus ſuſtinentes ſunt æquales:

quare

quare tam ſuſtinebit SB quam LC. funiculi SB FN LC igitur æqualiter pondus ſuſtinebunt. Ergo.

Prop. VII. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne ſuſpenſa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus unum extremum ſupra alicubi religatur, alterum à potentia pondus ſuſtinente detinetur; erit potentia ponderis ſubmultiplex denominatione dupla numero orbiculorum in inferiori trochlea, hoc eſt, ſi unus eſt orbiculus, ſubdupla: ſi duo ſint orbiculi, ſubquadrupla: ſi tres ſubſextupla, &c. Ratio ſequitur ex 6 &lemmate.

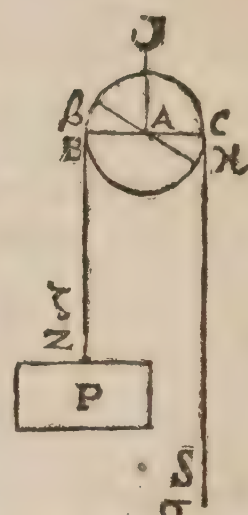


Nam diametri orbiculorum BAC DEG FML ſunt tanquam vectes horizonti æquidiſtantes: & quia in vecte FML, fulcimentum eſt M, funiculi FB LD æqualiter ſuſtinent. Et quia pondus dependet ex AE mediis punctis vectium BAC DEG funiculi FB NC æqualiter ſuſtinent: item funiculi SG LD. quare omnes funiculi SG FB NC LD æqualem partem ponderis P ſuſtinent: & pondus in utraque vecte BAC DEG æqualiter ponderabit. Ergo.

Coroll. I. Manifeſtum eſt ex prop. 2. 4. 5.

7. & 9. ſingulos funiculos trochleam inferiorem pertingentes æqualem totius ponderis partem æqualiter ſuſtinere. Ideoque inferiorem trochleam cui pondus alligatur efficere ut pondus minore potentia ſuſtineatur, quod quidem trochlea ſuperior non efficit.

Prop. X. Si trochleæ ſurſum appenſæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus alteri extremo alligatum ſit pondus, in altero potentia movens collocata : primò movebit hæc vecte horizonti ſemper æquidiſtante.



Nam dum CS tendet in $\kappa\sigma$ remanet ſemper $CS\sigma$ horizonti perpendicularis, circulumque tangens in puncto C, per centrum A linea horizonti ſemper parallela, quod idem etiam evenit funiculo BZ & puncto B. Quare dum orbiculus circumvertitur, ſemper movetur vectis BC, ſemperque adhuc remanet alter vectis BC horizonti parallelus. Ergo.

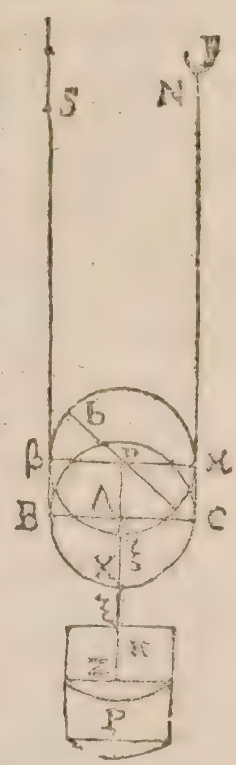
Secundo ſpatium potentiæ pondus moventis æquale eſt ſpatio ejuſdem ponderis moti. Nam $Z\zeta = S\sigma$.

Tertio eadem potentia idem pondus (ſive cum trochlea ſurſum appenſa, ſive abſque ipsâ tro-

chlea)

chlea) per æquale Spatium in æquali tempore movebit: dummodo lationes velocitate ſint æquales.

Prop. XI. & XII. Si trochleæ ponderi alligatæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus unum extremum alicubi ſurſum religetur, alterum à potentia pondus movente detinetur: primò movebit hæc vecte horizonti ſemper æquidiſtante.



Nam cum potentia in S dum tendit ſurſum attollendo orbiculum, ſemper movetur in recta limea B S σ parallela ipſi NC: etiam orbiculi centrum A in recta linea Z A α movebitur. Ducta recta diamerro $\beta \alpha \kappa$ horizonti parallela, orbiculus tanget funiculos BS CN in partibus $\beta \kappa$. Fiat $P\pi = A\alpha$. Quando orbiculi centrum eſt α, pondus P erit in π, & potentia movens S aſcendit in σ. Quare dum orbiculus movetur & circumvertitur ſemper movetur vectis B C, ſemperque adhuc remanet alter vectis $\beta \kappa$ horizonti parallelus. Ergo.

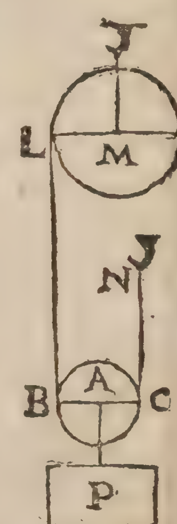
Secundo ſpatium potentiæ pondus moventis duplum eſt ſpatii ejuſdem pon-

deris

deris moti. Nam cum funiculus $N\kappa + \kappa C +$ $CXB + B\beta + \beta S = N\kappa + \kappa\xi\beta + \beta S + S\sigma$. demtis igitur æqualibus reſtat $\kappa C + B\beta = S\sigma$. Ergo.[1]

Tertiò eadem potentia idem pondus fune circa orbiculum trochleæ ponderi alligatæ, in æquali tempore per dimidium ſpatium movebit, quam abſque trochlea: dummodo lationes velocitate ſint æquales. Nam ſpatium $Z\zeta = \frac{1}{2} S\sigma$.

Prop. XIV. Et ſi ſingulis duarum trochlearum orbiculis quarum altera ſuperne ſuſpenſa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum alicubi ſurſum non quidem ſuperiori trochleæ religatur, alterum à potentia pondus movente detinetur: Erit ſpatium potentiæ pondus moventis ad ſpatium ponderis moti multiplex denominatione dupla numero orbiculorum in inferiori trochlea: hoc eſt, ſi duo fuerint orbiculi, quadrupla; ſi tres, ſextupla, &c.



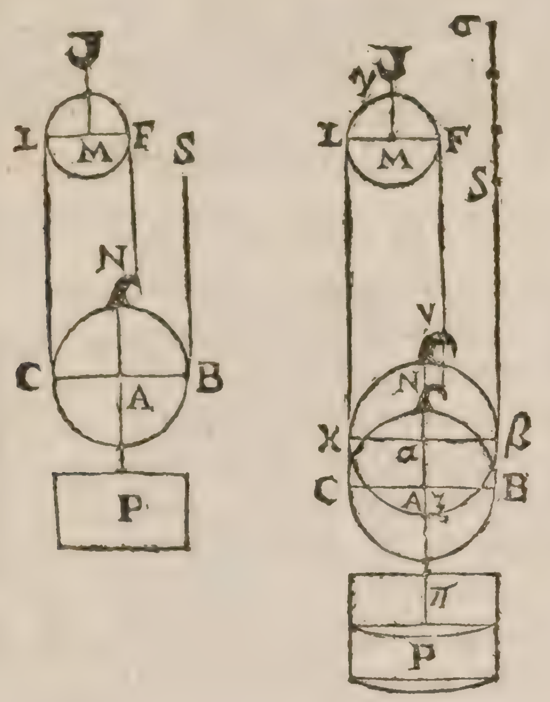
Demonſtratio ſatis manifeſt. Ex priore.

Prop. XIII. & XIV. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne ſuſpenſa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum inferiori tro-

1 $S\sigma$ duplum $A\kappa = B\beta$ vel KC per 34. E. 1.

chleæ:

chleæ religatur, alterum à potentia pondus movente detinetur. Erit ſpatium potentiæ pondus

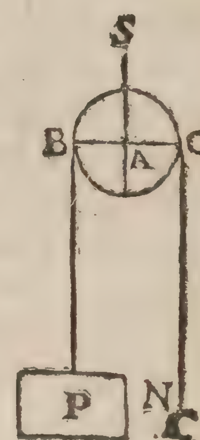


moventis ad ſpatium ponderis moti multiplex, denominatione compoſita ex unitate, & totidem binariis quot ſunt in inferiori trochlea orbiculi, hoc eſt, ſi unus ſit orbiculus, tripla; ſi duo, quintupla; ſi tres ſeptupla, &c.

Nam fiat $P\pi = A\alpha = N\nu$. Quando uncus **N** eſt in ν, erit orbiculi centrum A in α, & pondus P in π & potentia movens S aſcendet in σ. Quare

funiculus $N\nu + \nu\underline{F\gamma I}\varkappa + \varkappa C + \underline{CXB} + B\beta + \underline{\beta S} = \underline{\nu F\gamma L\varkappa} + \underline{\varkappa\xi\beta} + \underline{\beta S} + S\sigma$. demtis igitur æqualibus reſtat $N\nu + \varkappa C + B\beta = S\sigma$. Ergo.

Coroll. II. Manifeſtum eſt ex 10, 11, 12, 13, & 14; Ita ſe habere pondus ad potentiam ipſam ſuſtinentem, ſicut ſpatium potentiæ moventis ad ſpatium ponderis moti. Scil: reciproce.



Prop. XV. Si trochleæ à potentia ſuperne ſuſtentatæ orbiculo funiculus fuerit circumductus; cujus unum extremum alicubi religatur, ex altero pondus P appendatur: Erit potentia pondus ſuſtinens ipſius ponderis dupla. Nam quia potentia in S, ſuſtinet orbiculum in centro A: & funiculus N C eſt immobilis, erit BAC tanquam vectis cujus fulcimentum eſt C. Quare CB. CA: : potentia in A. P. At CB = 2 CA. ergo.

Aliter ſic. Loco unci N, appendatur ex N pondus æquale ipſi P. æqueponderabunt igitur: & potentia in A ſuſtinens ambo, erit ambobus æqualis. Ergo dupla unius.

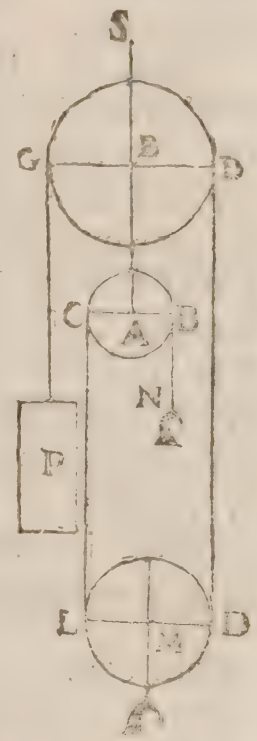
Prop. XVI. Si trochleæ à potentia ſuperne motæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus unum extremum alicubi religatur, ex altero pondus appendatur: Primo movebit hæc vecte

horizon-

horizonti ſemper æquidiſtante. Et ſecundo ſpatium ponderis moti duplum eſt ſpatii potentiæ moventis Quare Tertio, Eadem potentia idem pondus ope unius orbiculi trochleæ ſuperioris ſurſum motæ in æquali tempore per duplum ſpatium movebit, quam abſque trochlea: dummodo lationes velocitate ſunt æquales.

Demonſtratio ſimilis erit ei quæ ante ad Prop. XI.

Prop. XVIII. Et ſi ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne à potentia in S ſuſtentata: altera inferne alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus unum extremum alicubi deorſum non quidem inferiori trochleæ religetur, ex altero pondus appendatur. Erit potentia pondus ſuſtinens ipſius ponderis multiplex, denominatione dupla numero orbiculorum in ſuperiore trochlea: hoc eſt, ſi unus ſit orbiculus, dupla; ut in 15: ſi duo orbiculi, quadrupla; ſi tres ſextupla, &c.



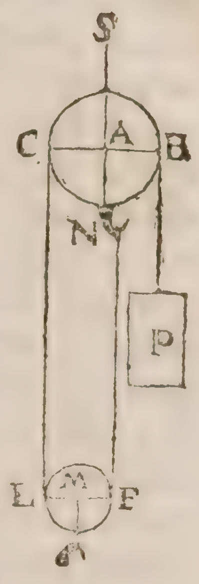
In ſchemate ratio potentiæ ad pondus eſt quadrupla: Nam potentia in C, ſuſtinens pondus P funiculo C L F D G P, vel potentia in G ſuſti-

nens pondus funiculo G P, [1] æqualis eſt ponderi, at per 15 potentia in E ſuſtinens pondus P dupla eſt potentiæ in G: & potentia in A ſuſtinens idem pondus dupla eſt potentiæ in C. Quare duæ potentiæ in A E duplæ ſunt ponderis P. At cum potentia in S orbiculis ſuſtinet pondus P: erit potentia in S ac ſi duæ eſſent potentiæ una in A altera in E: & utræque ſimul pondus ſuſtinerent. Ergo potentia in S ipſius ponderis quadrupla.

Aliter ſic. Diametri orbiculorum BAC. DEG. FML ſunt tanquam vectes horizonti æquidiſtantes. Et quia in vecte FML fulcimentum eſt M, funiculi D F C L æqualiter tenduntur: Et quia in vectibus BAC, DEG fulcimenta ſunt A E, funiculi B N C L æqualiter tenduntur: item funiculi D F G P. Quare omnes funiculi D F B N C L G P æqualiter tenduntur à potentia in S è punctis A E tanquam uno: hiſce autem tenſionibus æqualiter reſiſtunt potentiæ in NFL & pondus P. Ergo Potentia in S equalis eſt potentiis in N F L & pondus P: hoc eſt quatuor P ponderibus.

1 Per. 1 Hu.

Prop.



Prop. XVII. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne à potentia in S ſuſtentata, altera inferne alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus unum extremum ſuperiori trochleæ religatur, ex altero pondus appendatur: Erit potentia pondus ſuſtinens ipſius ponderis multiplex, denominatione compoſita ex unitate & totidem binariis quot ſunt in trochlea ſuperiori orbiculi. hoc eſt, ſi unus ſit orbiculus, tripla; ſi duo, quintupla; ſi tres ſint orbiculi, ſextupla, &c.

In ſchemate ratio potentiæ in S ad pondus P tripla.

Nam ſi duæ eſſent potentiæ pondus P ſuſtinentes, una in A, alteræ in B, erunt utræque ſimul triplæ ponderis P. potentia enim in B eſt æqualis ponderi P, & potentia in A ipſius dupla. at potentia in S eſt utrique æqualis quia ſola pondus ſuſtinet. Ergo.

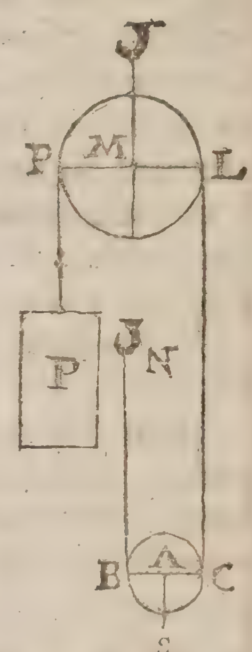
Aliter ſic. Diametri orbiculorum BAC FML, ſunt tanquam vectes horizonti æquidiſtantes. Et quia in vecte FML fulcimentum eſt M, funiculi FN LC æqualiter tenduntur. Et quia in vecte BAC fulcimentum eſt A funiculi BP NF CL æqualiter tenduntur à potentia in S. hiſce autem

tenſio-

tenſionibus æqualiter reſiſtunt potentiæ in punctis FL & pondus P. Ergo potentia in S æqualis eſt omnibus, hoc eſt tribus P ponderibus.

Ad Prop. XVII. & XVIII. Item ſi S ſit potentia movens pondus: Erit ſpatium ponderis moti tam multiplex ſpatii potentiæ moventis.

Prop. XIX. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne ſuſpenſa, altera inferne à potentia ſuſtinente detenta fuerit, circumducatur funiculus, cujus alterum extremum alicubi ſurſum non quidem ſuperiori trochleæ religatur; ex altero pondus appendatur, Erit potentia in S pondus P ſuſtinens ipſius ponderis multiplex denominatione dupla numero orbiculorum in inferiore trochlea: hoc eſt; ſi unus ſit orbiculus, dupla; ſi duo quadrupla, &c.



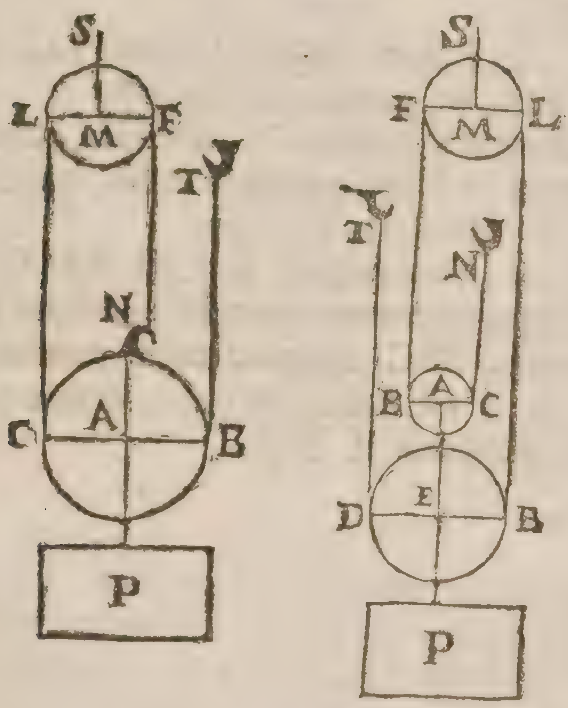
Nam cum per 3, Potentia in P ſuſtinens pondus appenſum ex S æquale ipſi P ſubdupla ſit ejuſdem ponderis: potentia in S æqualis eidem ponderi ſuſtinebit pondus P potentiæ in P æquale: ponderiſque P dupla erit.

Aliter

Aliter ſic, Potentia in C [1] æqualis eſt ponderi P. Quare in vecte BAC cujus fulcimentum B ſit pondus appenſum ex C potentia in S vel A ſuſtinens pondus erit per 15, dupla ipſius ponderis.

Item ſi in S ſit potentia movens, erit ſpatium ponderis P moti duplum ſpatii potentiæ in S pondus moventis.

Prop. XX. & XXI. Generaliter ſic tradentur. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis quarum



altera ſuperne à potentia ſuſtentata, altera inferne

1 Per 1. hu.

ponderi

ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum alterutri trochleæ religatur, alterum alicubi ſurſum: Erit potentia in S ad pondus P, ut numerus funiculorum pertingentium ſuperiorem trochleam, ad numerum funiculorum pertingentium inferiorem.

Nota quod impar funiculus pertingit illam trochleam cui funiculi extremum religatur.

In primo ſchemate ratio eſt ſubſeſquialtera ſive 2 ad 3.

In ſecundo ſchemate ratio eſt ſubſeſquitertia, ſive 3 ad 4.

Nam (20) cum [1] ſinguli funiculi LC, NF, BT ſuſtinent tertiam partem ponderis P.

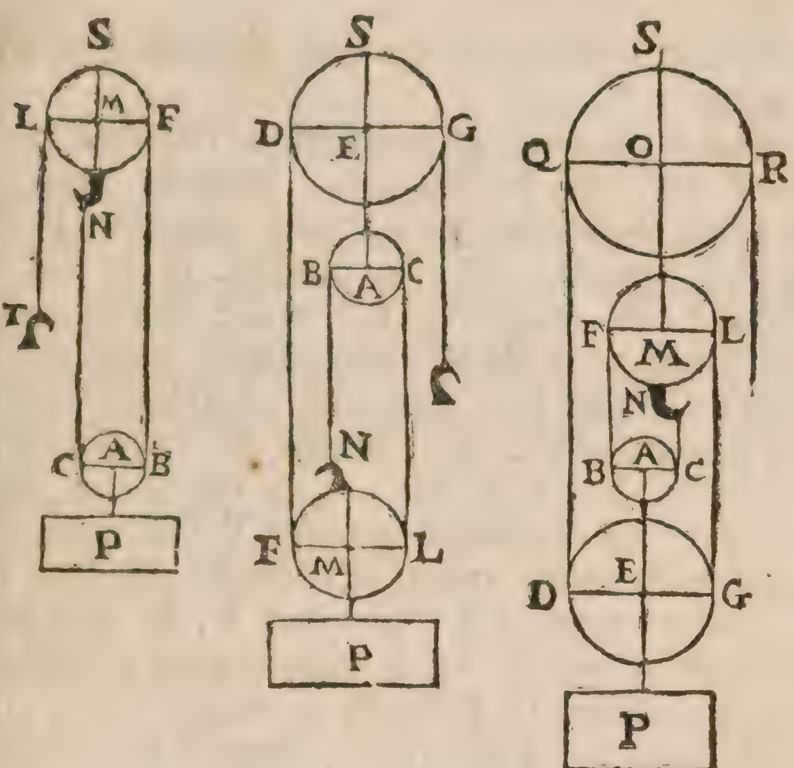
Erit utraque potentia CN ſubtripla ponderis P. At potentia in S utrique eſt æqualis, quare potentia in S eſt $\frac{2}{3}$ ponderis P. Ergo.

Nam (21) cum ſinguli funiculi BL CN, BF DT ſuſtineant quartam partem ponderis P, erunt tres potentiæ BBC ſubquadruplæ ponderis P: at potentia in S eſt tribus æqualis, quare potentia in S eſt $\frac{3}{4}$ ponderis P. Ergo.

1 Per 7. hu.

Prop. XXII.

Prop. XXII. Generaliter ſic tradi potuerit. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne à potentia ſuſtenta, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus,



cujus unum extremum alterutri trochleæ religarur, alterum alicubi deorſum : Erit potentia in S ad pondus P ut numerus funiculorum pertingentium ſuperiorem trochleam, ad numerum funiculorum pertingentium inferiorem.

Nota quod impar funiculus pertingit illam trochleam cui funiculi extremum religatur.

In primo ſchemate ratio eſt ſeſquialtera ſive 3 ad 2.

In ſecundo ſchemate ratio eſt ſeſquitertia ſive 4 ad 3.

In tertio ſchemate ratio eſt ſeſquiquarta ſive 5 ad 4.

Nam cum per 2 potentia in F ſuſtinens pondus P ſubdupla ſit ponderis: potentia vero in M dupla potentiæ in F: erit potentia in M ponderi æqualis. Et cum potentia in N vel C ſubdupla ſit ponderis P: erunt utræque ſimul potentiæ in M N ſeſquialteræ ponderis P (ſcil: $\frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ eſt $\frac{3}{2}$) Ergo cum potentia S duabus potentiis M N ſimul ſumtis ſit æqualis, erit $\frac{3}{2}$ ponderis P. Item per 13, & Coroll. 2, Potentia in D ſuſtinens pondus P [1] ſubtripla eſt ponderis: potentia autem in E dupla potentiæ in D, erit potentia in E $\frac{2}{3}$ ponderis P, & cum potentia in M vel N, vel B ſubtripla eſt ponderis: potentia autem in A dupla potentiæ in B, erit potentia in A $\frac{2}{3}$ ponderis P, Ergo duæ potentiæ in A E ſimul ſumtæ (hoc eſt potentia in S) ſunt $\frac{4}{3}$ ponderis P.

Item ſi in S ſit potentia movens erit ſpatium ponderis moti ad ſpatium potentiæ moventis in ſimili ratione.

1 Per 1. cor. hu.

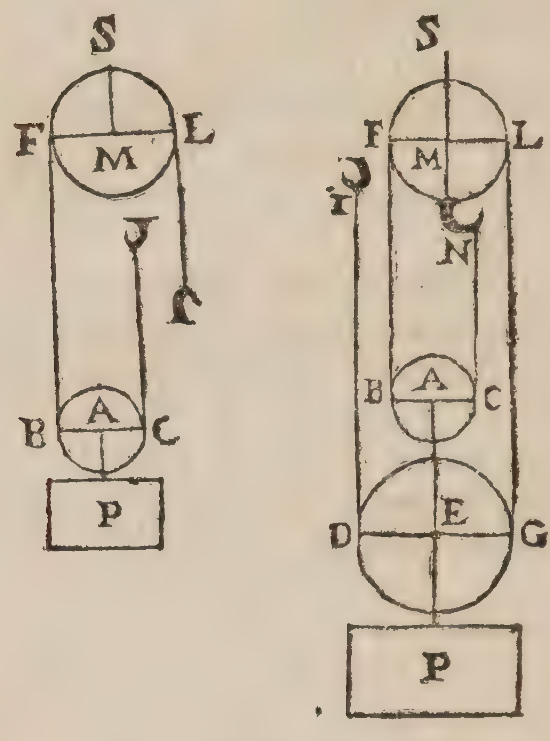
Prop. XXIII.

Prop. XXIII. Et ſi ſingulis duarum trochlearum orbiculis quarum altera ſuperne à potentia ſuſtenta, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus utrumque extremum alicubi deorſum non quidem ſuperiori trochleæ religatur: Erit ratio potentiæ ad pondus ut numerus orbiculorum ſuperiore trochlea ad numerum orbiculorum in inferiore, hoc eſt, ſi tres ſint in ſuperiore & duo in inferiore ſeſquialtera, &c.

Nam ſi trochlea inferior habeat duos orbiculos, pertingunt ipſum quatuor funiculi, quorum unuſquiſque ſuſtinet [1] quartam partem ponderis: omnes ſunt $\frac{4}{4}$ ponderis. Et potentiæ in centris trium orbiculorum ſuperioris trochleæ ſimul ſumtæ (hoc eſt, potentia in S) ſunt $\frac{3}{2}$ ponderis: ratio autem $\frac{3}{2}$ ad $\frac{4}{4}$ eſt ut 3 ad 2.

1 Per 1. Cor. hu.

Prop. XXIIII. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis quarum altera ſuperne à potentia ſuſtenta, altera inferne ponderi alligata fuerit,



circumducatur funiculus, cujus unum extremum alicubi ſurſum, alterum alicubi deorſum non quidem trochleis religatur: Erit potentia ponderi æqualis.

Nam potentia in T vel F vel B ſuſtinens pondus P eſt ſubdupla ponderis; potentia autem in M vel S dupla potentiæ in F. Erit potentia in S æqualis ponderi.

Nam

At trochlea diſpoſita ut in ſchem. 2. ſi in F L duæ eſſent potentiæ pondus P ſuſtinentes, foret per 7, utraque ſeorſim ſubquadrupla ponderis: potentia autem in S dupla eſt utriuſque potentiæ in F L ſeorſim: quare potentia in S æqualis eſt potentiis in F L ſimul ſumtis. Ergo potentia S eſt $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})\ \frac{2}{4}$ ponderis P.

Item ſi S ſit potentia movens erit ſpatium ponderis moti ad ſpatium potentiæ moventis in ſimili ratione.

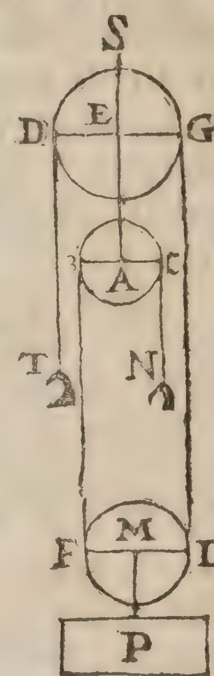
Motus hic ſic fit. Vectis B A C fulcimentum eſt C. potentia in B vel F, pondus in A: Vectis D E G fulcimentum in D, potentia in G vel L pondus in E. Et quia potentiæ in F L ſunt æquales, vectis F L in neutram movebitur partem, ideoque nec orbiculus circumvertetur, ſed tantum directe aſcendet.

Prop. XXV. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne à potentia ſuſtenta, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus utrumque extremum alicubi ſurſum non quidem ſuperiori trochleæ religatur, Erit ratio potentiæ ad pondus ſicut numerus orbiculorum ſuperioris trochleæ ad numerum orbiculorum inferioris. hoc eſt, ſi

duo

duo orbiculi ſunt in ſuperiore trochlea, & tres in inferiore ſubſeſquialtera, &c.

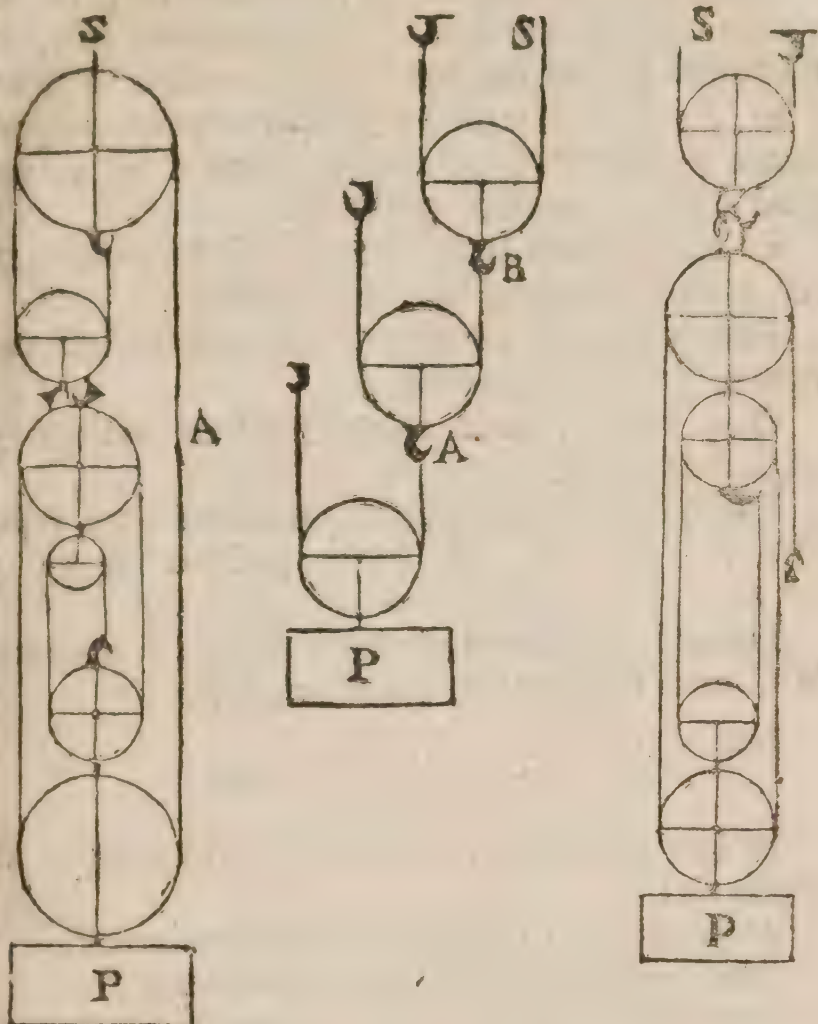
Nam ſi trochlea inferior habeat tres orbiculos, pertingunt ipſam ſex funiculi, quorum unuſquiſque ſuſtinet ſextam partem ponderis: Quatuor igitur funiculi qui pertingunt ſuperiorem trochleam ſuſtinebunt $\frac{4}{6}$ ſive $\frac{2}{3}$ ponderis.



Vel ſi in B G eſſent duæ potentiæ pondus P ſuſtinentes, foret per 2 utraque ſubdupla ponderis P: potentia autem in A dupla eſt potentiæ in B, & potentia in E dupla eſt potentiæ in G, quare potentiæ duæ in AE ſimul ſumtæ (hoc eſt potentia in S) duplæ ponderis P. Item ſi in S ſit potentia movens erit ſpatium ponderis moti ad ſpatium potentiæ moventis in ſimili ratione.

Prop. XXVI.

Prop. XXVI. Proportionem ſuperpartientem invenire. Eſto proportio ponderis ad potentiam ſuſtinentem ut 5 ad 3 invenienda.



Exponatur per 9 potentia in A pondus P ſuſtinens, ſic ut potentia ponderis ſit ſubquintupla.

Deinde

Deinde eodem funiculo circa alios orbiculos circumducto inveniatur per 17 potentia in S quæ tripla ſit potentiæ in A.

Nam quia pondus P ad potentiam in A eſt ut 5 ad 1: Et potentia in A ad potentiam in S, ut 1 ad 3: Ergo erit pondus P ad potentiam in S ut 5 ad 3. atque hoc modo reliquæ omnes proportiones ponderis ad potentiam (puta 7 ad 4, vel 8 ad 3 &c.) inveniri poterunt.

Et hoc quidem unico factum eſt funiculo: poteſt autem pluribus funiculis præſtari.

Eſto proportio ponderis ad potentiam ſuſtinentem, ut 5 ad 2 invenienda.

Quia ratio 5 ad 2 componitur ex ratione 5 ad 4 & 4 ad 2.

Exponatur primo per 22 potentia in A pondus P ſuſtinens, ad quam pondus ſit ut 5 ad 4.

Deinde alio fune inveniatur (per 2) potentia in C quæ ſubdupla ſit potentiæ in A.

Nam quia P. A : : 5. 4 }
Et A. S : : 4. 2 } Ergo

In hoc exemplo potentia in S ſuboctupla eſt ponderis P.

At potentia in B ſubquadrupla ponderis P.

Item potentia in A ſubdupla ponderis.

Atque hoc modo minui potentia poterit in infinitum ſubduplando.

Prop. XXVII.

Prop. XXVII. Datum pondus à data potentia trochleis movere. Eſto datum pondus ut 60: potentia vero ut 13 : per 9 Inveniatur potentia ſuſtinens pondus, ad quam pondus ſit ut 60 ad 12 (hoc eſt, ut 5 ad 1) Quoniam igitur potentia ut 12 ſuſtinet pondus datum, potentia ut 13 ipſum movebit.

Prop. XXVIII. Propoſitum ſit efficere potentiam pondus moventem, & pondus, per data ſpatia ſibi invicem commenſurabilia moveri.

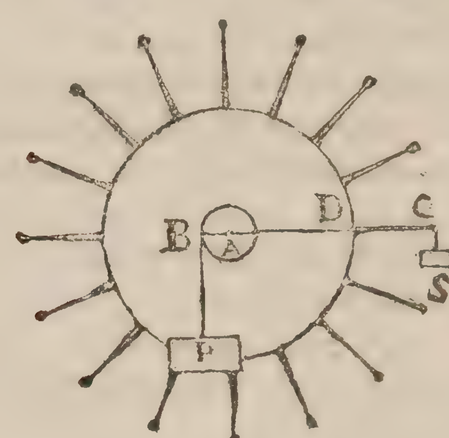
Eſto datum ſpatium potentiæ ut 3, ponderis vero ut 4. Inveniatur potentia ſuſtinens pondus, quæ ponderis ſit ſeſquitertia (hoc autem fit per 20 21 22) Ergo per Coroll. 2.

Coroll. 3. ſpatium potentiæ moventis, ad ſpatium ponderis moti majorem habet proportionem quam pondus ad potentiam.

Coroll. 4. Quo pondus facilius movetur, eo tempus majus eſt: quo vero difficilius, eo minus eſt. Et è converſo.

De Peritrochio.

PEritrochii axis eſt qui duobus ſuſtentaculis nititur; ejus centrum A, ſemidiameter AB Axi autem orbis, in quo ſunt Scytalæ, quod tympanum dicitur affigitur : ita ut moto tympano per ſcytalas moveatur & axis.



Axi etiam pondus appenditur fune, qui axi religatur, & dum pondus ſurſum movetur circa axem revolvitur : 1 Potentia S pondus P ſuſtinens axe in Peritrochio, eſt ad pondus, ut ſemidiameter axis AB, ad ſemidiametrum tympani una cum ſcytala AD + DC.

1 Per 1. Vec.

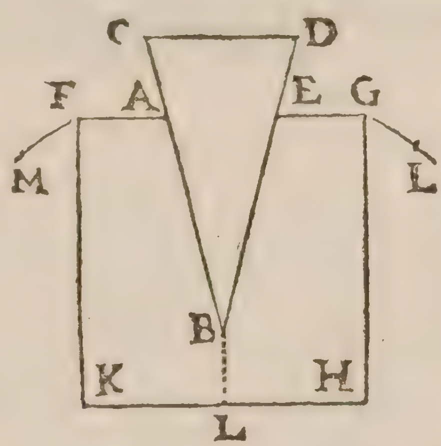
De

DE CUNEO.

Cuneus in ſcindendo pondere eſt inſtar duorum vectium ſibi invicem contrariorum.

Duo Vectes contrarii ſunt B A C B E D, in quibus conſiderari poteſt potentia in C D : fulcimentum in B, & pondera in A E vel potius fulcimenta in AE : & pondus in B.

Dum Cuneus findit lignum F G H K baſis puncta H K immota ſunt centra motus punctorum G F quæ in fiſſura moventur per arcus G L F M.



Quoniam totus cuneus ſcindendo movetur, poſſumus ipſum aliter conſiderare : nempe ut unum cunei latus ſit in plano horizontis, alterum inclinatum horizonti : & id quod ſcinditur,

nihil aliud ſit niſi pondus ſuper planum horizonti inclinatum movens.

Duo efficiunt ut aliquod cuneo facilius ſcindatur.

Primum eſt angulus ad verticem cunei, quo enim minor eſt angulus, eo facilius movet ac ſcindit.

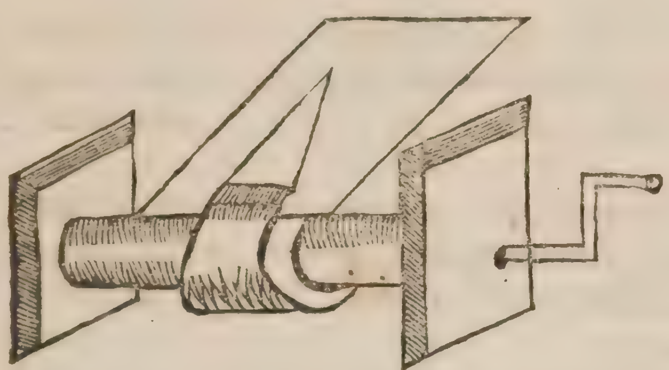
Secundum eſt percuſſio qua cuneus movetur, & movet: hoc eſt percutitur & ſcindit.

Percuſſionis mirifica vis eſt: ſi enim ſupra cuneum maximum ponatur onus; vel etiam ſi cuneo vectis, aut cochlea, aliudve quodvis inſtrumentum aptetur ad cuneum ponderi imprimendum, nullius fere erit momenti, preſertim ictus ſive percuſſionis comparatione.

DE

DE COCHLEA.

Pappus Lib. VIII. Mathematicarum collectionum dicit Cochleam nihil aliud eſſe præter aſſumtum cuneum percuſſionis expertem, vecte (ſeu manubrio) motionem facientem.



Nam dum cylindrus cum cuneo ipſi circumplicato, manubrio circumagitur: denſior cunei pars continuo ſubingrediens corpus ſcindendum majorem in ipſo fiſſuram facit donec tandem totum diſrumpitur. Quare cuneus hoc modo circa cylindrum accommodatus, nihil aliud eſt niſi cochlea duas habens helices in uno puncto conjunctas.

Cochlea vel movetur in cylindro concavo cui inciſæ ſunt helices congruentes iis quæ in ipſa cochlea: atque ideo mater ſive cochlea fæmina dicitur.

Vel movet tylum cochleæ ſuperimpoſitum : quod quidem inferiore plano habeat helices concavas appoſite admodum cochleæ aptatas.

Vel denique circumagit tympanum ſive orbem dentibus obliquis, vel etiam rectis, ita conſtructis ut facile cum cochlea conveniant, dentatum.

Duo efficiunt ut pondus cochlea facilius moveatur. Primum eſt tenuitas helicis : nam quo helix eſt minor, eo facilius movetur cochlea.

Secundum eſt ſcytala ſive manubrium quo cochlea circumgyratur : quo enim longius eſt manubrium eo etiam facilius movetur cochlea.

Coroll. quo igitur plures helices in cochlea, & quo longiores ſcytalæ, eo pondus facilius quidem, tardius autem movetur.

Ex promoto Archimede

Marini Ghetaldi.

I. SI quatuor magnitudines ſint proportionales, ſitque ſecunda homogenea primæ, & quarta tertiæ, ipſarum etiam gravitates ſimiliter proportionales erunt.

II. Si è quatuor corporibus gravibus, S. G. s. g. quorum tertium eſt homogeneum primo, & quartum ſecundo; primum & ſecundum fuerint magnitudine æqualia, tertium vero & quartum æquè gravia. Erit, ut gravitas primi ad gravitatem ſecundi, ſic gravitas liquidi. m æqualis magnitudine corpori quarto, ad gravitatem liquidi w æqualis tertio. Dico gravitas S. G : : gravitas m. w.

Accipitur W liquidum homogeneum m, & w; & æquale magnitudine. S vel G.

Nam per 1 } Gravitas g (æq: grave. s) G :: m. W } gravitas S.s(æq: grave. g) : : W. w } Ergo.

III. Erit etiam reciproce ut gravitas primi ad gravitatem ſecundi, ſic magnitndo quarti ad magnitudem tertii.

Dico gravitas S. G : : magn : g. s.

Nam per 2. gravitas S. G : : m. w : : magnit. g. s. per 1. Ergo.

IV. Corpora

IV. Corpora ſolida graviora liquido, erunt in liquido tanto leviora, quanta eſt gravitas liquidi æque magni atque ſolidum corpus. Archim: prop. 7. 1. de iis quæ vehuntur in aqua. Atque hinc

V. Primo invenitur gravitas liquidi per gravitatem corporis ſolidi datam. Eſto corpus plumbeum gravitatis 23, quod ſic in aqua ponderandum eſt: Ex altera libræ lance appendatur corpus illud plumbeum ſeta equina, in altera lance ponantur pondera: & corpus appenſum demittatur in aquam, ita ut in aqua libere pendeat, aqua neutram lancem contingente. hoc modo corpus plumbeum gravitatis 23 invenietur in aqua habere gravitatem 21. Erit igitur gravitas aquæ magnitudine æqualis corpori plumbeo dato 23-21 nempe 2.

Iterum ſit corpus cereum (quod quidem aqua levius eſt) gravitatis 21: & alterum plumbeum gravitatis 23: utriuſque igitur gravitas eſt 44: utrumque conjunctum in aqua ponderatum gravitatem 20 habeat: itaque gravitas aquæ habentis magnitudinem utrique æqualem erit 44-20. At vero gravitas aquæ æqualis corpori plumbeo inventa fuit 2. Ergo gravitas aquæ ipſi ceræ æqualis erit 44-20-2, hoc eſt 22.

Atque hoc modo corpora ſolida ponderabuntur etiam in vino vel oleo.

Si vero propoſitum ſit argentum vivum gra-

vitatis 95, cui æqualis aquæ gravitatem quærere oporteat: accipiatur vas vitreum v. g 91. ipſumque vas plenum aqua ponderetur in aqua, & habeat gravitatem 55: ſit igitur aquæ æqualis vaſi gravitas 91 - 55, ſcil. 36. Ponatur deinde in ipſum vas argentum vivum: Erit argenti vivi una cum vitro gravitas 95 + 91, ſcil. 186, extra aquam: at in aqua ponderabit 143: Eſt igitur gravitas aquæ æqualis argento vivo ſimul cum vaſe 186 - 143, ſcil: 43, ſed gravitas aquæ æqualis vaſi fuit 36: Ergo gravitas aquæ æqualis argento vivo eſt 43 - 36, ſcil: 7.

VI. Secundo invenitur gravitas ſolidi per gravitatem liquidi datam.

Eſto vas aliquod plenum aqua, cujus gravitas eſt 100: ſi repleatur plumbo quanta erit gravitas? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua per V^{am} inventa eſt habere gravitatem 2: dic 2. 23 :: 100. 1150: hæc erit gravitas plumbi implentis vas, ſive æqualis aquæ propoſitæ.

Si vero de ceræ gravitate quæratur: Quia corpori cereo gravitatis 21 æqualis aqua per V^{am} inventa eſt habere gravitatem 22: dic 22. 21 :: 100. $95\frac{5}{11}$: hæc erit gravitas ceræ implentis vas ſive æqualis aquæ propoſitæ.

VII. Tertio invenitur magnitudo liquidi per corporis ſolidi magnitudinem datam.

Eſto corpus plumbeum magnitudinis 10, quanta

erit magnitudo aquæ gravitatem habentis eandem cum corpore illo plumbeo ? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua gravitatem habet 2, Erit reciproce per III^{am} hujus ut gravitas aquæ ad gravitatem plumbi, ſic magnitudo plumbi ad magnitudinem aquæ æquiponderantis quæſitam, hoc eſt 2. 23 :: 10. 115.

Sed ſi corpus plumbeum ſit ſphæra è diametro data 10, cujus cubus eſt 1000 : dicetur 2. 23 :: 1000. 11500. qui cubus eſt è diametro ſphæræ aqueæ.

VIII. Quarto invenitur magnitudo corporis ſolidi per liquidi magnitudinem.

Eſto aqua magnitudinis 115 : quanta erit magnitudo plumbi gravitatem habentis eandem cum aqua propoſita ? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua gravitatem habet 2. Erit reciproce per III^{am} hujus 23. 2 :: 115. 10 : hæc erit magnitudo plumbi æqualis æquæ propoſitæ.

Sed ſi corpus aqueum ſit ſphæra è diametro data 10 cujus cubus eſt 1000 : dicatur 23. 2 :: 1000. 86$\frac{22}{23}$: qui cubus eſt è diametro ſphæræ plumbeæ.

IX. Quinto invenitur gravitas corporis ſolidi unius generis per gravitatem corporis ſolidi alterius generis datam. Eſto corpus plumbeum gravitatis 46 : quanta erit gravitas ſtanni magnitu-

dinem

dinem habentis eandem cum corpore illo plumbeo? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua gravitatem habet 2: corpori autem ſtanneo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habere invenitur 5: corpori item plumbeo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habebit $\frac{74}{23}$. Erit igitur per 11 hujus 5. $\frac{74}{23}$: : 46. $\frac{14}{5}$ ($29\frac{3}{5}$): hæc erit gravitas ſtanni magnitudinem habentis eandem cum plumbo propoſito.

Similis erit operatio, ſi pro alterutro ſolido ponatur argentum vivum.

X. Sexto invenitur magnitudo corporis ſolidi unius generis per magnitudinem corporis ſolidi alterius generis datam. Eſto corpus plumbeum magnitudinis 10: quanta erit magnitudo ſtanni gravitatem habentis eandem cum corpore illo plumbeo? Quia corpori plumbeo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habuit $\frac{74}{23}$: corpori autem ſtanneo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habet 5, Erit per 11 hujus $\frac{74}{23}$. 5 : : 10. $15\frac{20}{37}$. vel etiam ſic; Quia corpori plumbeo gravitatis 46 æquale ſtannum gravitatem habet $\frac{148}{5}$ per IX hujus; Erit reciproce per III hujus $\frac{148}{5}$. 46 : : 10. $15\frac{20}{37}$. hæc erit magnitudo ſtanni gravitatem habentis eandem cum plumbo propoſito.

Sed ſi corpus plumbeum ſit ſphæra è diametro 10, cujus cubus eſt 1000: dicetur $\frac{74}{23}$. 5: vel $\frac{148}{5}$. 46 : : 1000. $1554\frac{2}{37}$; qui cubus eſt è diametro ſphæræ ſtanneæ quæſitæ.

Similis erit operatio, ſi pro alterutro ſolido ponatur argent: vivum.

XI. Septimo invenitur gravitas corporis liquidi unius generis per gravitatem corporis liquidi alterius generis datam. Eſto oleum gravitatis 550: quanta erit gravitas aquæ magnitudinem habentis eandem cum oleo propoſito? Quia corpori plumbeo gravitatis v g: 138 æqualis aqua gravitatem habet 12: æquale aut oleum invenitur per V^am^ hujus gravitatem habere 11: Erit reciproce per III hujus 11. 12:: 550. 600: hæc erit gravitas aquæ æqualis oleo propoſito.

Si pro alterutro liquido ponatur argentum vivum, conſulas V^am^ hujus.

XII. Octavo invenitur magnitudo corporis liquidi unius generis per magnitudinem corporis liquidi alterius generis datam.

Eſto oleum magnitudinis 600: quanta erit magnitudo aquæ gravitatem habentis eandem cum oleo propoſito? Quia corpori plumbeo gravitatis, puta 138, æqualis aqua gravitatem habet 12, æquale autem oleum 11. Erit reciproce per III^am^ hujus 12. 11:: 600. 550: hæc erit aquæ æqualis oleo propoſito magnitudo.

Similis erit operatio, ſi pro alterutro liquido ponatur argentum vivum: conſules autem V^m^ hujus ad finem, ubi de argento vivo ponderando agitur.

XIII. Sphæ-

XIII. Sphæræ ejuſdem generis inter ſe ſunt in gravitate, ut diametrorum cubi in magnitudine.

XIV. Tabellæ binæ pro comparandis inter ſe duodecim corporum generibus gravitate & magnitudine; in ſuperiore tabella. 1 ponitur pro levioris gravitate: at pro magnitudine gravioris. In inferiore 100 ponitur pro gravioris gravitate: at pro magnitudine levioris.

Exempli gratia corpus plumbeum ad corpus aureum ejuſdem magnitudinis rationem habet in gravitate ut $1^{22.\,38}_{\;ad}\ 1\frac{15}{23}$: vel ut $60\frac{10}{19}$ ad 100. Scil. directè $\frac{38}{19}$. 23 : : $\frac{100}{50}$. $\frac{1150}{19}$.

Item corpus plumbeum ad corpus aureum ejuſdem gravitatis rationem habet in magnitudine, ut $1\frac{15}{23}\ {}_{ad}\,{}^{38}_{1}\ {}^{23}$ vel ut 100 ad $60\frac{12}{19}$ Scil. reciproce.

Apud noſtros Aurifices. $1^{lb.}$ eſt 5760 granorum hordei = decem unciis Ghetaldi ſi grana eadem ſint: at ſi grana exterorum fuerint tritici, vel piperis, ejus libra, eſt 6912. gran: & 5184. gran. Angl.

Pes Romanus antiquus ad pedem uſitatum Anglicanum eſt ut 11 ⌊8 ad 12 vel ut 9 ⌊83 ad 10. At vero ad Romanum palmum modernum ut 4 ad 3. Libram dividit Ghetaldus in uncias 12, $\frac{(576)}{unciam}$ in ſcuprula 24: ſcrupulum in grana 24.

XV Ad inveniendum gravitatem ſphæræ datam habentis diametrum: Cylindrum ex ſtanno

altitu-

altitudine æqualem diametro baſis fieri curavit Ghetaldus exactiſſime tornatum, cujus altitudo erat ſextans pedis Romani; gravitas vero inventa eſt duarum librarum cum uncia & octo ſcrupulis, hoc eſt granorum 14592: hujus bes eſt granorum $\frac{8\times 1116}{9728}$ pro gravitate ſphæræ ejuſdem diametri. Itaque.

XVI. Si quæratur gravitas ſphæræ ſtanneæ habentis diametrum æqualem quadranti unciæ: qui quadrans unciæ eſt $\frac{1}{8}$ pars duarum unciarum: dic: ut cubus ex 8 ad cubum ex 1, hoc eſt ut 512 ad 1, ſic 9728 ad. 19 quare per XIII ſphæræ cujus diameter eſt quadrans unciæ gravitas erit 19 granorum.

Cubus ex uncia Romana eſt gr. 2322\3887324. & ſphæra ex unciali diametro eſt gr. 1216. 64) 1216 (19.

Ex hac ratione 1 ad 19 inventa, omnium ſphærarum è ſtanno conflatarum quæcunque ipſarum fuerit diameter, gravitas facillime patebit per XIII ſicut ante. 1. 19:: (c:4) 64. 1216:: (c:8) 512. 9728 gr: gravitas ſphæræ ſtanneæ diametri $\frac{8}{4}$ unciæ.

XVII. Si quæratur gravitas ſphæræ plumbeæ habentis diametrum æqualem quadranti unciæ: quia plumbum eſt ad ſtannum in gravitate ut $1\frac{41}{74}$ ad 1 per tabellam ſuperiorem hoc eſt ut 115 ad 74: Et gravitas ſphæræ ſtanneæ cujus diameter $\frac{1}{4}$ unciæ eſt 19: Dic, ut 74 ad 115, ſic 19 ad $29\frac{39}{74}$: tanta erit gravitas quæſita.

XVIII. Si

XVIII. Si quæratur diameter ſphæræ ſtanneæ gravitatem habentis $\frac{lb}{1}$. ſive 6912 grana nempe 12 + 24 + 24): Quia ſphæra ſtannea cujus diameter eſt 1 uncia pendit grana 1216 (19 + 64) per XVI. Dic per XIII ut 1216^{gr} ad 1^{u}, ſic 6912^{gr} ad $5\frac{13}{19}{}^{u}$; qui cubus eſt diametri ſphæræ ſtanneæ quæſitæ: cujus radix cubica ſic eruetur ad partes uſque centeſimas. multipliciter $5\frac{13}{19}$ per 1000000 factus erit $5684210\frac{10}{19}$, hujus neglecta fractione latus cubicum eſt 178 tanta erit diameter ſphæræ ſtanneæ pendentis 1 libram. $5\frac{13}{19}$ eſt $\frac{108}{19}$: 19.) 108(000000 (5(684210.

XIX. Si quæratur diameter ſphæræ ferreæ gravitatem habentis $\frac{lb}{1}$ ſive 6912 grana. Primo per XVII inveniatur gravitas ſphæræ ferreæ diametri 1 unciæ, quæ eſt granorum $1314\frac{22}{37}$: dic per XIII ut $1314\frac{22}{37}{}^{g}$ ad 1^{u}, ſic 6912^{g} ad $5\frac{42}{190}{}^{u}$; qui cubus eſt diametri ſphæræ ferreæ quæſitæ; cujus radix cubica 174 eſt ipſa diameter.

XX. Si trium corporum æque gravium primum (A) & tertium (D) fuerint diverſi generis: ſecundum autem (B + C) compoſitum ex primo & tertio: fuerint etiam tres aquæ quantitates tribus illis corporibus æquales (P, Q, O + L) ſitque E gravitas portionis B, & K gravitas portionis C: ita ut E + K ſit communis gravitas trium corporum primorum æquegravium: ſitque G gravitas aquei corporis P, & H gravitas corporis aquei Q; & F gravitas portionis aquæ O,

&

& V gravitas portionis L) erit primo: ut differentia gravitatum primæ & tertiæ quantitatis aquæ, ad differentiam primæ & ſecundæ quantitatis aquæ, ſic gravitas corporum communis ad gravitatem portionis corporis ſecundi, quæ eſt ejuſdem generis cum corpore tertio: (ſcil. H – G. F + V – G :: E + K. K.)

Eritque ſecundo ut differentia gravitatum primæ & tertiæ quantitatis aquæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ quantitatis aquæ; ſic gravitas corporum communis ad gravitatem reliquæ portionis corporis ſecundi: (ſcil. H – G. H – F – V :: E + K. E.)

Corpora

Nam { D. C :: Q. L / A. B :: P. O }

Ideoque per 1

{ E + K. K :: H. V :: G. G - F :: H - G. V - G + F
{ E + K. E :: G. F :: H. H - V :: H - G. H - V - F

XXI. Hinc invenitur portio metalli alteri metallo miſta, per ratiocinationem ponderis. Eſto corpus aureum argento miſtum gravitatis 95 : quanta eſt portio argenti in ipſo?

Intelligantur ſaltem duo alia corpora unum pure aureum, alterum pure argenteum, eandem cum dato gravitatem habentia: Deinde trium corporum ex aqua, quorum primum magnitudine æquale ſit puro aureo, ſecundum miſto, tertium puro argenteo, gravitates inveſtigentur per V^m

&

& I^{m} Eritque primi corporis aquei gravitas 5, ſecundi 6, tertii $9\frac{6}{31}$. Tum denique per XX. fiat ut $9\frac{6}{31}$ - 5, ad 6 - 5; ſic 95, ad $22\frac{17}{26}$; tanta fuit portionis argenti miſti cum auro gravitas: reliquum fuit ex auro puro: Vel dic $9\frac{6}{31}$ - 5. $9\frac{6}{31}$ - 6: :95. $72\frac{9}{26}$ quæ gravitas eſt auri puri.

XXII. Aurum purum appellatur ab aurificibus aurum 24 partium: auri autem miſti ſive minus puri qualitas exprimitur partibus auri puri quæ ſunt in corpore propoſito, non in magnitudine ſed in gravitate ſumtis, qualibus totum corpus conſtat 24: v: g: ſi in corpore cum viginti partibus auri puri immiſceantur 4 partes metalli alterius, dicitur aurum viginti partium, ſive di 20 caratti. Nec miſcere cum puro auro ſolent aurifices argentum ſolum: ſed quo minus à ſimilitudine auri miſtum diſcedat, argentum & æs æqualis ponderis miſcent una cum auro, edocti ſcilicet ab experientia hunc eſſe miſtionis modum optimum. Quando ergo aurifices volunt producere aurum cujuſcunque qualitatis accipiunt tot partes auri puri æquales, quot partium futurum eſt aurum producendum, & reliquas partes quæ deſunt ad 24 explent argento & ære æquali pondere: & quoniam in liquefactione ex argento & ære aliquid evaneſcet, cum aurum imminutum maneat, ſolent idcirco tanto plus miſcere argenti & æris, quantum perdi poſſe deprehendunt; atque his rite inter ſe permixtis componunt aurum qualitatis aptatæ.

Auri gravitas quæ in aere eſt 19, erit in aqua 18
Argenti gravitas quæ in aere eſt 31, erit in aqua 28
Æris gravitas quæ in aere eſt 9, erit in aqua 8

Item Aqua

ad aurum ut 1 ad 19.
ad argentum ut 3 ad 31.
ad æs eſt ut 1 ad 9.

Et quia 31. 28::9. $8\frac{4}{31}$: Argenti gravitas quæ in aere eſt 9, erit in aqua $8\frac{4}{31}$.

Quare corporis ex argento & ære æqualiter miſti gravitas in aere 18, erit in aqua $16\frac{4}{31}$.

Et corporis ex argento & ære miſti gravitas erit ad aquam ut 18 ad $1\frac{27}{31}$ (9 ad $\frac{29}{31}$)

XXIII. Quibus ſic conſtitutis, invenitur qualitas corporis quomodocunque ex argento & ære æqualiter miſti. Eſto maſſa auri cujus gravitas in aere ſit unciarum 24: Quæritur cujus qualitatis ſit ipſum aurum?

Ponderetur ea maſſa in aqua; & habeat gravitatem unciarum $22\frac{2818}{5301}$: Ergo per 4 & 5 gravitas aquæ magnitudinem habentis æqualem maſſæ erit unciarum $1\frac{2483}{5301}$.

Deinde inveniatur gravitas aquæ magnitudine æqualis maſſæ unciarum 24, ex argento & ære æqualiter miſtæ, ſic: 9.$\frac{29}{31}$ :: 24. $2\frac{46}{93}$.

Atque ita habentur tres gravitates trium aquæ quantitatum, quarum prima eſt unc: $1\frac{5}{19}$. gravitas aquæ magnitudine æqualis auro puro unciarum 24.

Secunda

Secunda eſt unc: $1\frac{24483}{55301}$, gravitas aquæ magnitudine æqualis maſſæ propoſitæ.

Tertia eſt unc: $2\frac{46}{93}$, gravitas aquæ magnitudine æqualis maſſæ tertiæ ex argento & ære.

Vel in eadem denominatione. Prima eſt $1\frac{13295}{55301}$. Secunda $1\frac{24483}{55301}$. Tertia $2\frac{26622}{55301}$.

Differentia primæ & tertiæ eſt $1\frac{12227}{55301}$. Secundæ & Tertiæ $1\frac{2139}{55301}$.

Dic igitur per XXI. hujus $1\frac{12227}{55302}$. $1\frac{2139}{55301}$ :: 24. 20. vel ſic 6. 5 :: 44. 20.

Quare maſſa auri propoſita eſt 20 partium, vel di 20 caratti: quia continet 20 uncias puri auri, cum quatuor unciis argenti & æris ſimul. Verum ſi numerus unciarum maſſæ propoſitæ alius eſſet quam 24, peracta ut prius operatione, numerus unciarum inventus ad 24as partes per proportionem erit revocandus.

Automata.

4 mobiles	5 mobiles
O	O
o) I (ζ	o) V (α
ι) E (δ	υ) I (ζ
ε) A (γ	ι) E (δ
	ε) A (γ
motrix α) B (β	motrix α (B (β

I-I. æqualia tempore: vel quæ æquali tempore moventur.

T. revolutiones circa Fuſum.

C. tota continuatio motus.

D. numerus crenarum rotæ coronariæ intra unam horam motarum.

Δ. numerus crenarum rotæ coronariæ intra unam revolutionem A motarum.

B. rota horaria, cujus revolutio fit in H. horis, aut partibus temporis.

P. altera rota horaria, cujns revolutio fit in MI partibus temporis.

F. altera rota horaria, cujus revolutio fit in N partibus temporis.

I. In omni Automato quædam ex rotis & tympanulis efficiunt, ſive excitant motum; alia determinant, ſive ſpecificant.

II. Quæ

II. Quæ efficiunt motum, ſunt, prima magna rota A. cum Fuſo, quæ movet ϵ tympanulum ſecundæ rotæ E; quæ deinde movet ι. tympanulum tertiæ rotæ I; quæ tertio movet o tympanulum rotæ coronariæ O; quæ poſtremo movet libram.

III. Quæ ſpecificant motum ſunt, tympanulum α. affixum axi majoris rotæ, movens B rotam Horariam, cujus revolutio fit in H horis, aut partibus temporis; Vel tympanulum η affixum ſecundæ rotæ E, movens alteram rotam horariam P cujus revolutio fit in M partibus temporis; vel demum ϵ affixum axi tertiæ rotæ I, movens F tertiam horariam rotam, cujus revolutio fit, in N partibus temporis; una cum intermediis rotis, & tympanulis prout neceſſitas poſtulaverit.

IV. Si numerus rotæ diviſus fuerit, per numerum alterius rotæ, illam moventis, aut ab illa motæ; Quotiens indicabit quot revolutiones diviſoris æquant unam dividendi; & quota pars dividendi æqualis ſit uni revolutioni diviſoris: ut ſi $\frac{A}{\epsilon} = \gamma$. erit A l-l γE. & $\frac{A}{\gamma}$ l-l E. (i. e.) una revolutio A, & γ revolutiones E æquali tempore fiunt. Et $\frac{1}{\gamma}$ pars A, & una revolutio E æquali tempore moventur. Sic $\frac{E}{\iota} = \delta$. & $\frac{I}{o} = \zeta$.

V. Quare in omni motu, numeri duarum rotarum faciunt rationem, ſive fractionem, cujus

numerator

numerator eſt motrix, in iis quæ efficiunt motum: ut $\frac{A}{\varepsilon} = \gamma$. $\frac{E}{I} = \delta$. $\frac{I}{O} = \zeta$. ſed in iis quæ ſpecifiant, denominator. ut. $\frac{B}{\alpha} = \beta$. $\frac{P}{\pi} = \pi$. $\frac{F}{\alpha} = \phi$ (Nam $A \,|{-}|\, \alpha$. $E \,|{-}|\, \varepsilon$. $I \,|{-}|$. L.)

VI. $A \,|{-}|\, \gamma E \,|{-}|\, \gamma\delta I \,|{-}|\, \gamma\delta\zeta O$. (i.e.) totidem revolutionibus O ſi accipiatur pro rota coronaria; vel totidem crenis rotæ O ſi pro numero accipiatur. Quod intelligi debet de reliquis literis A, E, I, & B. P. F. & H. M. N.

VII. $H \,|{-}|\, B \,|{-}|\, \beta A \,|{-}|\, \beta\gamma E \,|{-}|\, \beta\gamma\delta I \,|{-}|\, \beta\gamma\delta\zeta O$

$M. \,|{-}|\, P \,|{-}|\, \pi E \,|{-}|\, \pi\delta I \,|{-}|\, \pi\delta\zeta O$

$N \,|{-}|\, F \,|{-}|\, \phi I \,|{-}|\, \phi\zeta O$

$A \,|{-}|\, \frac{H}{\beta} \,|{-}|\, \frac{B}{\beta}$.

$E \,|{-}|\, \frac{H}{\beta\gamma} \,|{-}|\, \frac{M}{\pi} \,|{-}|\, \frac{P}{\pi} \,|{-}|\, \frac{B}{\beta\gamma}$

$I \,|{-}|\, \frac{H}{\beta\gamma\delta} \,|{-}|\, \frac{M}{\pi\delta} \,|{-}|\, \frac{P}{\pi\delta} \,|{-}|\, \frac{N}{\phi} \,|{-}|\, \frac{F}{\phi}$

VIII. $\gamma\delta\zeta O = \Delta$. (i. e.) numero crenarum rotæ coronariæ intra unam revolutionem A motarum (per. 6.) Quare $A \,|{-}|\, \Delta$.

IX. $A \,|{-}|\, \frac{\gamma}{\pi} P$. & $P \,|{-}|\, \frac{\pi}{\gamma} A$. Nam (per 6. 7) $A \,|{-}|\, \gamma$ $E \,|{-}|\, \frac{P}{\pi}$. Ergo. Item $A \,|{-}|\, \frac{\gamma}{\pi} M$. Nota quod $\frac{\gamma P}{\pi}$ & $\frac{\gamma}{\pi} P$. idem eſt.

X. A

X. $A \mid\!-\!\mid \frac{\gamma\delta}{\phi} F$. & $F \mid\!-\!\mid \frac{\phi}{\gamma\delta} A$. Nam (per 6. 7.) $\frac{A}{\gamma\delta} \mid\!-\!\mid I \mid\!-\!\mid \frac{F}{\phi}$. Ergo. Item $A \mid\!-\!\mid \frac{\gamma\delta}{\phi} N$.

XI. Quare $A \mid\!-\!\mid \Delta \mid\!-\!\mid \frac{H}{\beta} \mid\!-\!\mid \frac{B}{\beta} \mid\!-\!\mid \gamma E \mid\!-\!\mid \gamma\delta I \mid\!-\!\mid \frac{\gamma}{\pi} P \mid\!-\!\mid \frac{\gamma}{\pi} M \mid\!-\!\mid \frac{\gamma\delta}{\phi} F. \mid\!-\!\mid \frac{\gamma\delta}{\phi} N \mid\!-\!\mid \frac{H}{\beta} D$.

XII. $\frac{\beta\gamma\delta\zeta O}{H} = \frac{\beta\Delta}{H} = D$ (i. e.) numero crenarum rotæ coronariæ intra unam horam motarum. Nam (per 7) $H^{ho}. \beta\gamma\delta\zeta O :: i^{ho}. \frac{\beta\gamma\delta\zeta O}{H}$.

XIII. $\frac{\pi\Delta}{\gamma M} = \Omega$. (i. e.) numero crenarum O motarum intra unam partem M. Nam (per 7. 11) $\frac{M}{\pi} \mid\!-\!\mid E \mid\!-\!\mid \frac{\Delta}{\gamma}$. Quare $M \mid\!-\!\mid \frac{\pi\Delta}{\gamma}$. adeoque $\frac{1}{M} \mid\!-\!\mid \frac{\pi\Delta}{\gamma M} \mid\!-\!\mid \frac{\pi}{\gamma M} A$. Confect: $M. \frac{\pi}{\gamma} :: \Delta. D$. Et $E \mid\!-\!\mid \frac{1}{\gamma} \Delta$.

XIV. $\beta M. \frac{\pi}{\gamma} H :: \Delta. \Omega$. Nam

$$\left.\begin{array}{l} \beta. H :: D. \Delta \\ M. \frac{\pi}{\gamma} :: \Delta. \Omega. \end{array}\right\} \beta\gamma M \Omega = \pi H D.$$

XV. $\frac{\phi\Delta}{\gamma\delta N} \mid\!-\!\mid S$: (i. e. numero crenarum O intra unam partem N motarum. Nam (per 6,

7, 11.) $\frac{N}{\phi} \mathrel{|{-}|} I \mathrel{|{-}|} \frac{\Delta}{\gamma\delta}$. Quare $N \mathrel{|{-}|} \frac{\phi\Delta}{\gamma\delta}$: & $\frac{1}{N} \mathrel{|{-}|}$
$\frac{\phi\Delta}{\gamma\delta N} \mathrel{|{-}|} \frac{\phi}{\gamma\delta N}$ A.

Confect. N. $\frac{\phi}{\gamma\delta} :: \Delta.$ S

Confect. I. $\mathrel{|{-}|} \frac{1}{\gamma\delta}\Delta$

XVI. βN. $\frac{\phi}{\gamma\delta}$H : : D. S. Nam

$$\left.\begin{array}{l} \beta.\ H :: D.\ \Delta \\ N.\ \frac{\phi}{\gamma\delta} :: \Delta.\ D \end{array}\right\} \beta\gamma\delta\, NS = \phi HD$$

XVII. Ex præcedentibus propos: ſequitur.

$$\frac{1}{H} \mathrel{|{-}|} \frac{\beta}{H} A \mathrel{|{-}|} \frac{\beta\gamma}{H} E \mathrel{|{-}|} \frac{\beta\gamma\delta}{H} I \mathrel{|{-}|} \frac{\beta\gamma\delta\zeta}{H} O \mathrel{|{-}|} D$$

$$\frac{1}{M} \mathrel{|{-}|} \frac{\pi}{M} E \mathrel{|{-}|} \frac{\pi}{\gamma M} A \mathrel{|{-}|} \frac{\pi\delta}{M} I \mathrel{|{-}|} \frac{\pi\delta\zeta}{M} O \mathrel{|{-}|} \Omega$$

$$\frac{1}{N} \mathrel{|{-}|} \frac{\phi}{N} I \mathrel{|{-}|} \frac{\phi\zeta}{N} O \mathrel{|{-}|} \frac{\phi}{\delta N} E \mathrel{|{-}|} \frac{\phi}{\gamma\delta N} A \mathrel{|{-}|} S$$

XVIII. H. $\beta = \frac{B}{\alpha} :: \Delta.$ D :: C. T. Nam ſi in H horis ſint β revolutiones A: vel $\beta\Delta$ crenæ motæ (per 12.) in una hora ſunt $\frac{\beta}{H}$ revolutiones A; vel. $\frac{\beta\Delta}{H}$ crenæ motæ. uti tum etiam in C horis, (i. e.) continuatione motus Automati, fiunt T revolutiones A. vel revolutiones circa Fuſum.

XIX. Quare quo minor β. eo diuturnior erit C æquali T.

XX. Motus B. P : : β. $\frac{\pi}{\gamma}$

Et

Et motus. B. F : : $\frac{\beta}{\pi}$. $\frac{\phi}{\gamma\delta}$

Et motus P. F : : $\frac{\pi}{\gamma}$. $\frac{\phi}{\gamma\delta}$.

Nam B |-| $\beta\kappa$. & F |-| $\frac{\phi}{\gamma\delta}$ A. & P |-| $\frac{\pi}{\gamma}$ A.

(per. 7. 9. 10.)

De inventione Numerorum, qui rotis, & tympanulis aptentur.

XXI. Quælibet duæ fractiones, quarum termini ſunt proportionales, eundem motum efficiunt. ut $\frac{9}{1}$ vel $\frac{36}{4}$ vel $\frac{45}{5}$. Inferior eſt numerus tympanuli, ſuperior Rotæ.

XXII. Idem motus perfici poteſt, una rota, & uno tympanulo; vel multis rotis, & totidem tympanulis; modo Factus ex omnibus rotis, ſit ad factum ex omnibus tympanulis, ut iſta una rota ad illud unum tympanulum; ut in hoc exemplo.

$$\frac{1440}{28} = \frac{36}{28} + \frac{8}{1} + \frac{5}{1}. \text{ Vel } \frac{36}{4} + \frac{8}{7} + \frac{50}{1}$$

Nec refert quo ordine rotæ, & tympanula disponuntur : aut quod tympanulum, cui rotæ ſubjacet.

XXIII. Et hi factores inventi, multipliciter variari poſſunt per hanc regulam.

Regula.

Si duo factores dati dividantur, per alios duos numeros eos metientes : & Quotientes multiplicentur per alternos diviſores : Factus è du-

obus numeris ultimo inventis, æqualis erit facto è duobus factoribus datis. Sic pro 36 + 8 datis, prodibunt 32 + 9, ut in appoſito exemplo.

9		8
36	+	8
4		1
32	+	9

Nam. 36. 32 : : 9. 8 (1 + 9. 1 + 8 : : 4 + 9. 4 + 8.)

XXIV. Si idonei proportionales numeri inveniri non poſſunt, per ullam ex tribus hiſce ultimis regulis; quæres aliquam aliam rationem quam proximam, hoc modo: Dic, ut unus è numeris datis ad alterum, ſic 360 ad quartum: quem divide per 5. 6. 8. 9. aut per aliquem eorum qui dabit Quotientem, quam proximum integro: & per eundem etiam divide 360, Ut ſi duo numeri dati ſint $\frac{147}{170}$: qui majores ſunt quam commode poſſint rotis incidi, nec ad minores reduci poſſunt, quia eorum maxima communis menſura eſt 1.

Dic igitur $\begin{cases} 170.\ 147 :: 360.\ 311 + \\ 147.\ 170 :: 360.\ 416 + \end{cases}$

6) $\frac{311.}{360.}$ $\frac{52.}{60.}$ 8) $\frac{311.}{360.}$ $\frac{39.}{45.}$ 8) $\frac{360.}{416.}$ $\frac{45}{52.}$

Quare pro duobus numeris 147. & 170 datis. accipi poſſunt 52 & 60. vel 39 & 45. vel. 45 & 52. &c.

XXV. Si duæ rotæ alicujus motus extra tangant, movent viis contrariis: ſi intra, eadem.

XXVI. In

XXVI. In minoribus Automatis. D ad minimum ſit 8000. ſed in majoribus poſſit eſſe 4000 : nam in minoribus velocius motuum ſyſtema magis commendatur.

XXVII: Aptare numeros automato velocioris ſyſtematis ; cujus D ſit 10000. T. 12. C. 16. & O. 17.

Dic (per 18. ^{T}12 16^{C} :: 10000. 13333.

Deinde 17^{O}_{H}) 13333 (784. pro $\gamma\ \delta\ \zeta$ (per 8)

Quære igitur tres numeros; qui in ſe invicem ducti faciant 784 quam proxime. Sint 11. 9.8. quorum factus eſt 792.

quem duc in 17. Factus 13464 erit Δ (per. 8.) tum dic.

16^{C}. 12^{T} :: 13464$^{\Delta}$. 10098^{D}.

Dic etiam

16^{C}. 12^{T} : : 12^{H}. $\frac{9}{1}$. $\frac{B}{\alpha}$

Tum per tres Quotientes aſſumtos 11. 9. 8. invenias tres rotas, A 55. E 45. I. 40, & tria tympanula. ^{s} 5. 1. 5. 05. ut in appoſito exemplo.

4) 36 B (β

5) 55 (11. γ
5) 45 (9. δ
5) 40 (8. ζ
O 17

Δ 13464
D 10098
C 16. T 12.

XXVIII. Invenire quanta ſit continuatio motus cujus D ſit tardius. viz. 8000.

Dic. 13464$^{\Delta}$. 8000^{D} :: 12^{H}. $\frac{96000}{13464}$ $\frac{B}{\alpha}$ $\frac{36}{5}$

Tum dic $\frac{36}{5}$. $\frac{B}{\alpha}$. 12 :: 12^{T}. 20^{C}

XXIX. Aptare numeros Automato, cujus D ſit 5000. T 12. C 170. & O 17.

Operatio eſt, ut in 27 Dic 12^{T}. 170^{C} :: 5000. 70833 Tum 17) 70833 (4167 pro $\gamma\delta\zeta\theta$: Quia hic quatuor numeri neceſſarii ſunt, viz 8. 8, 8, $6\frac{3}{5}$ qui faciunt 4224. qui ductus in 17 facit 71808 Δ.

Tum dic 170^{C}. 12^{T} :: 71808Δ. 5069^{D} &, 17^{C}. 12^{T} :: 12^{H}. $\frac{144}{17}$ B. α.

α, 53) 45 B (β
ε. 6) 48 (8. γ
ι. 6) 48 (8. δ
υ. 5) 40 (8. ζ
ο. 5) 33 ($6\frac{3}{5}$ θ
O 17
Δ 71808
D 5068
C. 169⌊6. T 12

Hoc automatum habet quatuor rotas præter Coronariam: quæ una cum tympanulis inveniuntur ut in 27. & in appoſito exemplo.

XXX. Hoc automato dato cum quatuor rotis præter coronariam: invenire quanta erit continuatio motus, cum ſatis veloci ſyſtemate, cujus D. erit 9000. Dic 60480 Δ. 9000^{D} :: 12^{T}. $\frac{25}{14}$ $^{B}_{\alpha}$ (β.

Dic iterum. $\frac{25}{14}$ $^{B}_{\alpha}$. 12^{H} :: 12^{T}. $80\frac{16}{25}$ C.

6) 48 (8
5) 45 (9
5) 40 (8
5) 35 (7
O 15
Δ 60480
T 12

Et ſi requiratur utrum motus continuari poſſit ad 150 horas ſatis idoneo ſyſtemate.

Dic.

Dic. $150^{C}.\ 12^{T} :: 12^{H}.\ \frac{144}{150}\ \overset{B}{\alpha}.\ \frac{24}{25}$

dic iterum

$150^{C}.\ 12^{T} :: 60480^{\Delta}.\ 4836^{D}.$

Quod ſyſtema ſatis erit idoneum, ſi Automatum fuerit ſatis magnum: ſed nimis tardum erit, ſi Automatum fuerit exiguum.

Pars

Pars Secunda.

XXXI. Numerus cujuſque motus, eſt numerus revolutionum rotæ A, vel tympanuli α, quæ fiunt intra unam revolutionem iſtius motus. Ut ſi una revolutio motus peragatur 12 horis, & eodem tempore rota A faciat $\frac{B}{\alpha}$. (i. e.) β revolutiones: numerus motus quò hora indicatur, erit $\frac{\beta}{1}$ vel $\frac{B}{\alpha}$. Quare axi rotæ A, affigatur tympanulum α, circumducens rotam B: cujus centro index horarius affigendus eſt.

XXXII. Quoniam maximus numerus dierum unius menſis eſt. 31: & in uno die $2B$ |-| 2β revolutiones A fiunt, (per. 7) numerus motus quo dies menſis indicatur, erit 62 revolutiones A, (i. e.) $\frac{62}{1}$ B vel $\frac{62}{1} + \frac{B}{\alpha}$ A: & in rotis $\frac{62}{4} + \frac{4}{1}$ B: Nam $\frac{B}{\alpha}$ datur in automato. Quare rotæ B concentricum affigatur tympanulum 10, circumducens rotam 40. quæ tympanulo 4 circumducet annulum 62: cujus ſuperius planum dividatut in 31 dies.

XXXIII. Quoniam numerus dierum revolutionis Lunæ, eſt. $29\frac{1}{2}$ vel $\frac{59}{2}$, & in uno die $2B$ |-| 2β

revo-

revolutiones A fiunt : Numerus motus, quo ætas Lunæ indicatur, erit 59 revolutiones B, vel 59 β revolutiones A; (i. e.) $\frac{59}{1}$ B, vel $\frac{59}{1} + \frac{B}{\alpha}$ A, & in rotis $\frac{59}{4} + \frac{4}{1}$ B: Nam $\frac{B}{\alpha}$ datur in Automato. Quare rotæ B concentricum affigatur, tympanulum 10. circumducens rotam 40; quæ tympanulo 4, circumducet annulum 59, cujus ſuperius planum dividitur in dies $29\frac{1}{2}$.

XXXIV. Numerus dierum in Anno eſt 365, & in uno die fiunt 2 B |·| 2 β revolutiones A: quare Numerus motus quo dies anni, vel gradus ſolis in Eccliptica &c. indicatur, erit 730 revolutiones B, vel 730 β A + $\frac{10}{4}$ B vel $\frac{73}{1} + \frac{10}{1} + \frac{B}{\alpha}$ A: Et in ratis $\frac{73}{4} + \frac{10}{1} + \frac{4}{1} + \frac{B}{\alpha}$: Nam $\frac{B}{\alpha}$ in Automato datur. Quare rotæ B concentricum affigatur tympanulum, 10, circumducens rotam 40: quæ tympanulo 5 circumducit rotam 50; quæ demum tympanulo 4. circumducit annulum 37 3: cujus ſuperius planum dividitur in 12 Menſes, vel Signa &c.

XXV. Vel in plano horario, ex utraque parte annuli 73, nota dies anni, & gradus Eccliptica, appoſito Verno Æquinoctio ad horam 12: Et in ſuperiore parte annuli 73. ponantur horæ occaſus Solis ex hac tabulâ accommodata anno 1634.

VI	Mar. 10	Sep. 13	Sep. 13	Mar. 10	VI
$6\frac{1}{4}$	Mar. 17	Sep. 6	Sep. 20	Mar. 3	$5\frac{3}{4}$
$6\frac{1}{2}$	Mar. 24	Aug. 30	Sep. 27	Feb. 24	$5\frac{1}{2}$
$6\frac{3}{4}$	Apr. 1	Aug. 22	Oct. 5	Feb. 17	$5\frac{1}{4}$
VII	Apr. 9	Aug. 14	Oct. 13	Feb. 9	V
$7\frac{1}{4}$	Apr. 18	Aug. 5	Oct. 21	Feb. 1	$4\frac{3}{4}$
$7\frac{1}{2}$	Apr. 28	Jul. 26	Oct. 30	Jan. 24	$4\frac{1}{2}$
$7\frac{3}{4}$	Mar. 8	Jul. 16	Nov. 9	Jan. 14	$4\frac{1}{4}$
VIII	Mar. 20	Jul. 5	Nov. 20	Jan. 3	IIII
$8\frac{1}{8}$	Mar. 29	Jun. 26	Nov. 28	Dec. 26	$3\frac{7}{8}$
	VIII	13	III	47	

Ad VI adverſus Mar: 10, pone clavulum in annulo 73 ad indicandum diem Anni, & gradum Solis, hora occaſus Solis, quolibet die conſpicietur adverſus 10 Mar.

XXXVI. Exhibere figuram, vel Phaſin Lunæ quo libet die, In plano horario fiat foramen rotundum, ſub quo movebit planum annuli 59, notatum arcuatis lineis albo nigroque interſtinctis, uti à Gemma Friſio aliiſque oſtenditur.

XXXVII.

XXXVII. Hora maximi incrementi maris, quovis portu, hoc modo indicabitur. Quære quâ plaga Luna facit maximam intumeſcentiam maris portu dato, (ut ad Londini pontem. N E. vel S W.) Plagam inventam converte in horas; cuilibet plagæ à N vel S. ultimo appulſis, 45 minutis aſcriptis: adverſus horam duodecimam pone horam inuentam: à qua incipiens divides annulum in 24 horas, verſus eas partes, quibus lunæ annulus movetur, quo pacto dies novilunii, cum clavulo, quovis die horam maximi incrementi maris portu dato indicabit,

Tabula quâ plagæ compaſſi in horas convertantur. à N & S.

S	12	N	S	12	N
SbW	12. 45	NbE	SbE	11. 15	NbW
SSW	1. 30	NNE	SSE	10. 30	NNW
SWbS	2. 15	NEbN	SEbS	9. 45	NWbN
SW	3	NE	SE	9	NW
SWbW	3. 45	NEbE	SEbE	8. 15	NWbW
WSW	4. 30	ENE	ESE	7. 30	WNW
WbS	5. 15	EbN	EbS	6. 45	WbN
W	6	E	E	6	W

XXXVIII. Si vis indicem, Motum ſimul, & diei horam indicare; Fiet annulo movente ſuper planum Horarium ſub indice, cujus ſuperior facies notatur diuiſionibus iſtius Motus; Numeri tympanulorum, & rotarum, Ex. gr. in Motu Lunæ, (nam eadem eſt ratio in omnibus) ſic invenientur. Quoniam una revolutione indicis Luna conficit $\frac{1}{59}$ partem; Lunæ rota ita componi debet, ut in qualibet revolutione Indicis vel β revolutionibus A, diſcedat ab Indice $\frac{1}{59}$ partem β: Quare pro numero motus accipe $\beta + \frac{\beta}{59}$ (i. e.) $60 + \frac{\beta}{59}$, & motus proportionaliter tardior erit rota B, vel Indice. Vel accipe $\beta - \frac{\beta}{59}$ (i. e.) $58 + \frac{\beta}{59}$ & erit velocior. Tympanulum 59 affigendum eſt concentricum rotæ B, circumducens rotam 60, vel 58: cujus ſuperius planum dividendum eſt in dies $29\frac{1}{2}$.

XXXIX. Invenire rotam, cujus revolutio intra horam facta, indicet minuta. Primo quia (per 17) in una hora $\frac{\beta}{H}$ partes A moventur: ſi tympanulum H affigatur axi A, circumducet rotam β in una hora.

Vel ſecundo, quia B circumvolvitur in H horis: in una hora movebit $\frac{1}{H}$ B, (i. e.) $\frac{4}{4H}$ B. Quare tympanulum, 4 H affixum concentricum B circumducet rotam 4 in una hora,

Vel tertio, quia (per 7) E facit $\beta\,\gamma$ revolutione

in H horis: in una hora fient $\frac{\beta\gamma}{H}$ (i. e.) $\frac{\gamma}{H} + \frac{B}{\alpha}$ revolutiones E. Quare ſi tympanulum H affixum axi E circumducat rotam B: idem tympanulo α circumducet rotam γ in una hora.

Vel quarto, quia P circumvolvitur in $\frac{\pi}{\gamma}$ A (per 9) & $\frac{\beta}{H}$ A moventur in una hora (per 17) dic $\frac{\pi}{\gamma} . \frac{\beta}{H} :: P . \frac{\gamma\beta}{\pi H} P \mid\text{-}\mid \frac{1}{H}$. Quare tympanulum H affixum concentricum rotæ P, circumducens rotam β: quæ tympanulo π circumagens rotam γ in una horâ: indicabit minuta, vel quamvis partem horæ.

XL. Invenire rotam, cujus revolutio in uno minuto facta, indicabit minuta ſecunda. Quia prius demonſtratum eſt $\frac{\beta}{H}$ partes A moveri in una horâ, ideo in uno minuto (i. e.) $\frac{1}{60}$ horæ, $\frac{\beta}{60H}$ moventur: (i. e.) $\frac{\beta}{H} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$. Quare ſi tympanulum H affixum axi A circumducat rotam β. quæ tympanulo 40 circumducat rotam 4, eadem tympanulo 30 circumaget rotam 5 in uno horæ minuto.

Deinde, quia $\frac{\beta\gamma}{H}$ vel $\frac{B\gamma}{\alpha H\pi}$ ſuper axe E, dat rotam circumvolventem in una horâ; ideo $\frac{\beta\gamma}{60H}$, vel $\frac{\beta\gamma}{\alpha H} + \frac{1}{60}$ dabit rotam circumvolventem in uno minuto.

Vel tertio, quia $\frac{\beta\gamma}{H\pi}$, vel $\frac{B\gamma}{\alpha H\pi}$ ſuper rota P dat rotam circumvolventem in una horâ; ideo $\frac{\beta\gamma}{H\pi} + \frac{1}{60}$ vel $\frac{B\gamma}{\alpha H\pi} + \frac{1}{60}$ dabit rotam circumvolventem in uno minuto.

XLI. $M . \frac{\pi}{\gamma} :: K . \frac{\pi K}{\gamma M} = T\tau$; (i. e.) revolutiones A, vel Fuſi, pro K continuatione in partibus M. Nam (per. 11.)

$$\frac{\gamma M}{\pi} . A :: K . \frac{\pi K}{\gamma M} A.$$

XLII. $N . \frac{\phi}{\gamma\delta} :: R . \frac{\phi R}{\gamma\delta N} = T\varpi$. (i. e.) revolutiones A vel Fuſi. pro R. continuatione in partibus N.

Nam (per 11) $\frac{\gamma\delta N}{\phi} . A :: R \; \frac{\phi R}{\gamma\delta N} A$

XLIII. $\frac{\pi}{\gamma\delta} . M :: T\tau . \frac{\gamma M \varpi}{\pi} = K$. i. e. continuatio in partibus M.

XLIV. $\frac{\phi}{\gamma\delta} . N :: T\varpi . \frac{\gamma\delta N T\varpi}{\phi} = R$. i. e. continuatio in partibus N.

XLV. In hiſce quatuor ultimis prop: ſi Index horarius affigatur centro P, ſed maxime F, ſyſtema motuum erit admodum tardum: quia in M partibus temporis (i. e.) una revolutione F. tantum $\frac{\phi}{\gamma\delta}$ partes A moventur (per 10)

Adeo

Adeo ut prima rota, A, tanto velocior eſſe debet, quam cum Indice centro B affixo, quanto β major $\frac{\pi}{\gamma}$ vel $\frac{\phi}{\gamma\delta}$. & tum paucæ revolutiones circa Fuſum continuationem valde diuturnam facient: quod quo commodo fiat, judicio artificis expendendum permittitur.

XLVI. Sed centro P, vel F, alium Indicem affigendo, velocior motus perficiatur. Quandoquidem (per 9. & 10.) ratio motus B, ad motum P, vel F datur: quæ cognita cuilibet motui propoſito, applicari poteſt, ad inveniendа idonea tympanula cum rotis.

XLVII. Quia (per 7) $H \mathrel{|\!-\!|} \beta A \mathrel{|\!-\!|} \beta\gamma E$ vel. $\frac{B}{\alpha}.A = \frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{I}$ vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\eta\gamma}{\eta} E$: tam indicatur hora tympanulo η affixo axi rotæ E, circumducenti rotam $\eta\gamma$: quæ tympanulo α circumagat rotam B: quam tympanulo α circumducenti rotam: & eodem ſyſtemate.

XLVIII. Deinde quia (per 20.) Mot: P. B:: $\frac{\pi}{\gamma}.\beta$:: P. $\frac{\beta\gamma}{\pi}$ B; vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{\pi}$ P: tam indicatur hora rota π, affixa concentrica rotæ P, circumducenti, rotam $\beta\gamma$: vel &c. quam tympanulo α circumducenti rotam B: & eodem ſyſtemate.

XLIX. Quia (per 7) $H \mathrel{|\!-\!|} \beta A \mathrel{|\!-\!|} \beta\gamma\delta I$: vel $\frac{B}{\alpha} A \mathrel{|\!-\!|} \frac{B}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{I}$: vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma\delta}{\epsilon\iota} I$: tam indicatur hora tympanulo $\epsilon\iota$ affixo axi rotæ I, circumdu-

centi

centi rotam $\alpha\gamma\delta$: quæ tympanulo α circumagit rotam horariam B : quam tympanulo α &c.

L. Deinde quia (per 20.) Mot : F. B : : $\frac{\phi}{\gamma\delta}$: β : : F. $\frac{\beta\gamma\delta}{\phi}$ F : vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma\delta}{\phi}$ F. tam indicatur hora tympanulo ϕ affixo concentrico rotæ F, circumducenti rotam $\gamma\delta$: vel &c. quam tympanulo α circumducente rotam B : & eodem ſyſtemate.

F I N I S.

QUÆSTIONES

Libri I.

Diophanti Alexandrini.

I. DATIS Z & X quærere ipſos numeros.
$\frac{Z+X}{2} = A$. $\frac{Z-X}{2} = E$.

II. Datis Z & Ratione R ad S quærere &c.
R. S : : A. $\frac{SA}{R} = E$ quare $\frac{RA+SA}{R} = Z$ & $\frac{ZR}{R+S} = A$

III. Datis Z & Ratione R ad S, qua & inſuper magnitudine B major ſuperat minorem quærere, &c.
R. S : : A - B. $\frac{SA-BS}{R}$. minor; quare $= Z - A$
Et R + S in $A = ZR + BS$. vel $\frac{ZR+BS}{R+S} = A$

IV. Datis X & Ratione R ad S invenire &c.
R. S : : A. $\frac{SA}{R}$ quare $\frac{RA-SA}{R} = X$ & $\frac{XR}{R-S} = A$.

V. Datis Z, & B aggregato $\frac{1}{3}$ae majoris & $\frac{1}{2}$ae minoris.
Eſto major A, minor Z - A &c.
Vel eſto $\frac{1}{3}$a majoris A. $\frac{1}{2}$a minoris Z - A, &c.

VI. Da-

VI. Datis Z, & B exceſſu $\frac{1}{2}^{ae}$ majoris ſupra $\frac{1}{3}^{am}$ minoris.

Eſto major A, minor Z -- A &c.

Vel eſto $\frac{1}{2}$ majoris A, $\frac{1}{3}$ minoris Z -- A &c.

$\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}Z + A = B$ vel $A - \frac{2}{3}Z + \frac{2}{3}A = 2B$

Vel $3A - 2Z + 2A = 6B$. quare $\frac{6B+2Z}{5} = A$.

VII. Quis numerus eſt a quo ſi tollatur B & C, reliquus major erit duplus minoris.

Eſto numerus quæſitus A. & B $<$ C.

Quare $A - C.\ A - B :: 2.\ 1$

Ergo $A - C = 2A - 2B$

Ergo $2B - C = (2A - A =)\ A$.

VIII. Quis numerus eſt cui ſi addantur B & C aggregatus major, erit duplus minoris.

Eſto numerus quæſitus A & B $<$ C &c.

erit $2C + B = A$.

IX. Quis numerus eſt quo ſublato e B & C, reliquus major, duplus ſit minoris.

Eſto numerus quæſitus A & B $<$ C &c.

Quare $B - A.\ C - A :: 2.\ 1$

Ergo. $B - A = 2C - 2A$

Ergo. $2C - B = (2A - A =)\ A$.

X. Quis numerus eſt qui ſi tollatur e B & cui ſi addatur C, major ſit duplus minoris.

Eſto numerus quæſitus A & B $<$ C &c.

Quare. $B - A : A + C :: 2.\ 1$

Ergo. $2C - B = A$.

XI. Quis numerus eſt cui ſi addatur B & ex quo ſi tollatur C, major erit triplus minoris.

Eſto

Eſto numerus quæſitus A & B < C &c.

$A+B. A-C :: 3. 1.$ quare $A+B = 3A - 3C$.

Et $\frac{B+3C}{2} = A$

XII. Dividere Z in $A+E$, & in $I+O$ ſic ut $A = 2O$. & $I = 3E$. Eſto major A. minor $Z-A$ erunt duo reliqui $\frac{1}{2}A$, & $3Z - 3A$ Invenitur $A = \frac{4}{5}Z$.

PRAXIS.

$\frac{1}{2}A + 3Z - 3A = Z$

Vel $A + 6Z - 6A = 2Z$

Vel $4Z = 5A$. quare $5. 4 :: Z. A$ Ergo $\frac{4}{5}Z = A$.

XIII. Dividere Z in $A+E$, & in $I+O$ & in $V+Y$ ſic ut $A = 3O$, & $I = 2Y$, & $V = 4E$.

Eſto major A minor $Z - A : 4Z - 4A = V$

$\frac{1}{3}A = O : Z - \frac{1}{3}A = I = 2Y : \frac{1}{2}Z - \frac{1}{6}A = Y$

$\frac{1}{2}Z + \frac{1}{6}A = V$. quare $4Z - 4A = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{6}A$

Vel $\frac{21}{25}Z = A$.

XIV. Invenire duos numeros (A, E) ſic ut $AE = 3A + 3E$. Quare $EA - 3A = 3E$. Vel $AE - 3E = 3A$. Sumatur igitur pro E vel A numerus aliquis qui major ſit quam 3. Sit E. 5. erit

$5A - 3A$. i. e. $2A = 3E = 15$. & $A = 7\frac{1}{2}$

Ergo $AE = \frac{75}{2} = 3A + 3E = \frac{30}{2} + \frac{45}{2}$.

XV. Invenire duos numeros (A, E) ſic ut $2A - 2B = E + B$, & $3E - 3C = A + C$ Erit.

$2A - 3B = E$: & $6A - 9B - 3C = A + C$
Quare $A = \frac{4C+9B}{5}$.

XVI. Invenire tres numeros (AEI) ſic ut $A+E=B$: $E+I=C$: & $I+A=D$
Erit. $E = B - A$; & $B - A + I = C$,
vel, $I = C + A - B$ & $C - B + 2A = D$,
vel, $A = \frac{B+D-C}{2}$
vel eſto ſumma omnium Z, ut in 17.

XVII. Invenire quatuor numeros (AEIO) ſic ut $A+E+I=B$, & $E+I+O=C$, & $I+O+A=D$, & $O+A+E=F$
Erit. $I = B - A - E$: $O = C - B + A$: & $E = C - D + A$: & $C - B + A + A + C - D + A = F$
Vel $A = \frac{B+D+F-2C}{3}$.
Vel eſto ſumma omnium Z. Erit $O = Z - B$ & $A = Z - C$: & $E = Z - D$: & $I = Z - F$.
Quare $Z = 4Z - B - C - D - F$.
Vel $Z = \frac{B+C+D+F}{3}$.

XVIII. Invenire tres numeros (AEI) ſic ut $A+E = I+B$: & $E+I = A+C$: & $I+A = E+D$.
Erit $A+E-B = I = E+D-A$
Quare $A = \frac{D+B}{2}$: $E = \frac{B+C}{2}$: $I = \frac{D+C}{2}$
Vel $Z - B = 2I$. $Z - C = 2A$. $Z - D = 2E$.
Ergo dantur omnes tres.

XIX. Eadem quæ 18.

XX. In-

XX. Invenire quatuor numeros ($A E I O$) ſic ut $A + E + I = O + B$: & $E + I + O = A + C$: & $I + O + A = E + D$: & $O + A + E = I + F$

Eſto ſumma omnium Z. Erit $Z - B = 2\,O$ & $Z - C = 2\,A$ & $Z - D = 2\,E$: & $Z - F = 2\,I$

Quare $4\,Z - B - C - D - F = 2\,Z$

$$\text{Vel } Z = \frac{B + C + D + F}{2}.$$

XXI. Eadem quæ 20.

XXII. Divide Z in $A + E + I$ ſic ut $A + E = B\,I$ & $E + I = C\,A$

Erit $B\,I + I = Z = C\,A + A$

Quare $\dfrac{Z}{B+1} = I$ & $\dfrac{Z}{C+1} = A$.

XXIII. Invenire tres numeros ($A E I$) ſic ut $A - \frac{7}{3} I = E$: $E - \frac{1}{5} A = I$. $I - \frac{1}{4} E = B$. Erit $3A - 3\,E = I$, & $5\,E\,(-5\,I) - 15\,A + 15\,E$ hoc eſt $20\,E - 15\,A = A$, vel $\frac{4}{5} A = E$.

Quare $3\,A - \frac{12}{5} A$ hoc eſt $\frac{3}{5} A = I$.

Denique $\frac{3}{5} A - \frac{1}{5} A$ hoc eſt $\frac{2}{5} A = B$.

XXIV. Eadem quæ 23. $8\,E = 6\,B$.

XXV. Invenire tres numeros ($A E I$) ſic ut $\frac{2}{3} A + \frac{1}{5} E = \frac{4}{5} E + \frac{1}{4} I = \frac{3}{4} I + \frac{1}{3} A$. reſolvantur tres numeri in A juxta conditionem quæſtionis: eruntque A, & $\frac{5}{6} A = E$, & $\frac{2}{3} A = I$. Sumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus eſt per denominatores reliquorum 6 & 3 & fiet propoſitum.

Eſto A 6. erit E 5, & I 4 &c.

PRAXIS.

$\frac{4}{5}E - \frac{1}{3}A = \frac{1}{2}I.$ Et $\frac{2}{3}A - \frac{3}{5}E = \frac{1}{4}I.$

Vel $\frac{8}{5}E - \frac{2}{3}A = I = \frac{8}{3}A - \frac{12}{5}E.$ Vel

$$\overbrace{\underbrace{\frac{8}{5}+\frac{12}{5}}_{\substack{I\quad I\\ 5}}}^{20} E = \overbrace{\underbrace{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}}_{\substack{I\quad I\\ 3}}}^{10} A.$$

quare $4E = \frac{10}{12}A$ Vel $12E = 10A.$

$6.\ 5 :: A.\,E.$ & $\frac{5}{6}A = E.$

Et $\frac{5}{8}I + \frac{5}{12}A = E = \frac{40}{9}A - \frac{5}{12}I.$ Vel

$$3)\ \overbrace{\underbrace{\overset{40}{\frac{40}{9}} -- \overset{15}{\frac{5}{12}}}_{\substack{3\qquad 4\\ 36}}}^{25} A = 4)\ \overbrace{\underbrace{\overset{15}{\frac{5}{8}} + \overset{10}{\frac{5}{12}}}_{\substack{2\qquad 3\\ 24}}}^{25} I.$$

$24 :: 3.\,2 :: A.\,I.\ \frac{2}{3}A = I.$

XXVI. Invenire quatuor numeros (A, E, I, O,) ſic ut $\frac{1}{3}A + \frac{3}{4}E = \frac{1}{4}E + \frac{4}{5}I = \frac{1}{5}I + \frac{5}{6}O = \frac{1}{6}O + \frac{2}{3}A.$ reſolvantur quatuor numeri in A, juxta conditionem quæſtionis, eruntque A & $\frac{46}{75}A = E$, & $\frac{4}{5}A = I$ & $\frac{19}{25}A = O$. ſumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus eſt per denominatores reliquorum, 75, 25, 5 & fiet propoſitum. Eſto A 75: erit E 46 & I 60 & O 57.

PRAXIS.

PRAXIS.

$\frac{5}{12}A + \frac{5}{8}E = I$ & $\frac{21}{24}A - \frac{3}{16}E = O = \frac{9}{2}E - \frac{2}{1}A$

$$\text{Et}\ \begin{array}{c}\overbrace{21+48}^{69}\\ \frac{21}{24}+\frac{2}{1}\\ \underbrace{}_{24}\end{array} A = \begin{array}{c}\overbrace{72+3}^{75}\\ \frac{9}{2}+\frac{3}{16}\\ \underbrace{1\quad 8}_{16}\end{array} E \qquad \begin{array}{l} 3)\ 138.225::46.75::E.A.\\ 8)\ \frac{69}{24}\quad\frac{75}{16}\\ \qquad\underbrace{3\quad 2}_{48}\end{array}$$

XXVII. Invenire tres numeros (A, E, I,) ſic ut $A + \frac{1}{3}E + \frac{1}{3}I = E + \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}A = I + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}E$ reſolvantur tres numeri in A juxta conditionem quæſtionis, erunt A, & $\frac{17}{13}A = E$ & $\frac{19}{13}A = I$. ſumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus eſt per denominatores reliquorum 13 & 13 & fiet propoſitum. Eſto A 13, Erit E 17 & I 19.

PRAXIS.

$8E - 9A = I = \frac{16}{15}E + \frac{1}{15}A$. Vel

$$\begin{array}{c}\overbrace{120-16}^{104}\\ 8\ -\ 16\\ \underbrace{1\quad 15}_{15}\end{array} E = \begin{array}{c}\overbrace{135+1}^{136}\\ 9\ +\ 1\\ \underbrace{1\quad 15}_{15}\end{array} A \text{ Quare \&c:}$$

Et

$\frac{9}{8}A + \frac{1}{8}I = E = \frac{15}{16}I - \frac{1}{16}A$ vel

$$\underset{\underbrace{1\quad 2}_{16}}{\overbrace{\tfrac{2}{8}+\tfrac{1}{15}}^{19}}\,A = \underset{\underbrace{2\quad 1}_{16}}{\overbrace{\tfrac{15}{16}-\tfrac{1}{8}}^{14}}\,I$$

:: I. A vel

14. 19 :: A. I.

XXVIII. Invenire quatuor numeros (A,E,I,O) ſic ut $A + \frac{1}{3}E + \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}O = E + \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}O + \frac{1}{4}A = I + \frac{1}{5}O + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}E = O + \frac{1}{6}A + \frac{1}{6}E + \frac{1}{6}I$ reſolvantur quatuor numeri in A juxta conditionem quæſtionis: eruntque A, & $\frac{77}{47} = E$ & $\frac{92}{47} = I$ & $\frac{101}{47} = O$. ſumatur igitur pro A numerus quivis quiividuus ſit per denminatores reliquorum 47, & 47, & 47 & fiet propoſitum. Eſto A 47, erit E 77, & I 92, & O 101.

XXIX. Datis B & C invenire tertium ſub quo & B rectangulum, quadratum erit rectanguli ſub ipſo & C.
Eſto A Quare $BA = Cq\,Aq$. vel $\frac{B}{Cq} = A$.

XXX. Datis Z & Æ invenire duo latera.
Eſto majus A minus erit $Z - A$.
quare $ZA - Aq = Æ$
Atqui $\frac{1}{4}Zq - Æ = \frac{1}{4}Xq$. Et $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}X = A$.

XXXI. Z & Ƶ invenire duo latera. eſto majus A minus erit $Z - A$. quare $Zq - 2ZA + 2Aq = Ƶ$ vel
$ZA - Aq = \frac{Zq - Ƶ}{2} = Æ$. quare ut ſupra.

XXXII.

XXXII. Datis Z & X invenire latera. Eſto majus A, minus erit Z - A, quare 2 ZA - Zq = X. vel

$ZA = \frac{Zq + X}{2}$ vel $\frac{Zq + X}{2Z} = A$.

XXXIII. Datis X & Æ invenire latera Eſto majus A minus erit A - X; quare Aq - AX = Æ Atqui &c.

XXXIV. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S ad R, at ſumma numerorum ad ſummam quadratorum ut L ad T. Eſto minor E, major erit $\frac{RE}{S}$, $\frac{SE + RE}{S}$.

$\frac{Sq\, Eq + Rq\, Eq}{Sq}$ :: L. T Quare

$TSc + \frac{TSqR}{SRq} = E$

multiplica 2os primos terminos per alternos quotos. & fiat depreſſio. & quia L multiplicat & dividit expungatur.

XXXV. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S ad R & differentia numerorum ſit ad ſummam quadratorum ut L ad T.

XXXVI. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S ad R. Et ſumma numerorum ſit ad differentiam quadratorum ut L ad T.

XXXVII. Invenire duos numeros quorum minor

minor ad majorem ſit S ad R & diffrentia numerorum ad differentiam quadratorum ut L ad T.

XXXVIII. Invenire duos numeros quorum minor ſit ad majorem ut S ad R & major numerus ad quadratum minoris ut L ad T.

Eſto minor E. Æquatio erit $\frac{TR}{LS} = E$ quia

$\frac{RE}{S}$. Eq :: L. T.

XXXIX. Invenire duos numeros quorum minor ſit ad majorem ut S ad R. & quadratus minoris ad ipſum minorem ut L ad T.

XL. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S ad R & ſumma numerorum ad quadratum minoris ut L. ad T.

XLI. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S. ad R & differentia numerorum ad quadratum minoris ut L ad T.

XLII. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S. ad R & minor numerus ad quadratum majoris; vel major numerus ad quadratum majoris vel ſumma vel differentea numerorum ad quadratum majoris ſit ut L ad T.

XLIII. Datis duobus numeris B & C invenire tertium A ſic ut C + A in B : A + B in C : & B + C in A æquali decreſcant intervallo. Quia in tribus numeris Arithmetice proportionalibus,

tionalibus, duplum medii æquatur ſummæ extremorum.

Erit $2CA + 2BC = BC + 2BA + CA$.

Quare $\frac{BC}{2B - C} = A$.

PRAXIS.

$$\frac{\begin{matrix} C + A \\ B \end{matrix}}{BC + BA} \qquad \frac{\begin{matrix} A + B \\ C \end{matrix}}{CA + BC} \qquad \frac{\begin{matrix} B + C \\ A \end{matrix}}{BA + AC}.$$

FINIS. Libri I.

QUÆSTIONES
Libri II.
Diophanti Alexandrini.

I INvenire duos numeros A. E ſic ut Z. Z :: S.R. Eſto minor E : Aſſumptoque numero B quocunque ſit B E major ;
Quare B E + E. Bq Eq + Eq :: S. R.
Quare $\frac{B R + R}{Bq S + S} = E.$

II. Invenire duos numeros A, E : ſic ut X. X :: S. R. Æquatio Erit
$\frac{B R - - R}{Bq S - - S} = E.$

III. Invenire duos numeros A, E ſic ut Z. Æ:: S. R. Eſto minor E aſſumptoque B ſit BE major, Quare B E + E : B Eq :: S. R. quare $\frac{B R + R}{B S} = E.$

IV. Invenire duos numeros A, E, ſic ut X. Z :: S. R. Eſto minor E, major B E.

PRAXIS.

B E - E. Bq Eq + Eq :: S. R. Quare

BRE

BRE-RE = Bq SEq + SEq quare $\frac{BR - R}{Bq S + S} = E$.

V. Invenire duos numeros A, E ſic ut Z.X : : S.R.
Æquatio erit $\frac{BR + R}{Bq S + S} = E$.

VI. & VII. Invenire duos numeros A, E ſic ut X ſit B: & X ſit C : ſit minor E, major erit B + E, differentia quadratorum Bq + 2 BE = C.
Quare $\frac{C - Bq}{2B} = E$.

VIII. & IX. Datum Bq in duo quadrata dividere. Eſto unum e quæſitis Aq cujus latus A, alterum erit Bq - Aq : cujus latus (aſſumpto numero C quocunque) Eſto CA - B hujus autem quadratum eſt
Cq Aq - 2 CBA + Bq = Bq - Aq quare $\frac{2CB}{Cq+1} = A$.
Si Bq ſit 16: & C 3. Q: $\frac{24}{10}$ + Q: $\frac{32}{10}$ = 16.
Si Bq ſit 16 & C 5. Q: $\frac{40}{26}$ + Q: $\frac{96}{26}$ = 16.
Hinc patet inventio triangulorum Rectangulorum
$\frac{24}{10} \times \frac{24}{10} = \frac{576}{100}$. & $\frac{32}{10} \times \frac{32}{10} = \frac{1024}{100}$ = 16 vel
$\frac{40}{26} \times \frac{40}{26} = \frac{1600}{676}$. & $\frac{96}{26} \times \frac{96}{26} = \frac{9216}{676}$ hoc eſt

$$\left.\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}1600\\9216\end{matrix}\right.\\ \overline{10816}\end{matrix}\right\} = 676)\ 10816\ (16.$$

X. Dividere Bq + Cq datum in duo alia quadrata. ſit B major quam C. aſſumptis duobus

 numeris

numeris quibuſcunque R majore: & S minore: Eſto latus unius R A - B: & latus alterius S A - C horum quadrata

$$\text{Sunt}\begin{cases} Rq\,Aq - 2\,B\,R\,A + Bq \\ Sq\,Aq - 2\,C\,S\,A + Cq \end{cases} = \begin{matrix} Bq \\ Cq \end{matrix}$$

Quare $\frac{2BR + 2CS}{Rq + Sq} = A$. At vero latus binom: fuit S A - C

hoc eſt $\frac{2\,B\,R\,S + 2\,C\,Sq - C\,Rq - C\,Sq}{Rq + Sq}$

Hujus quadratum ſi tollas e Bq + Cq reſtabit quadratum aliud.

XI. Invenire duos numeros quadratos quorum differentia ſit B C. aſſumpto numero conveniente D. Eſto latus minoris A, majoris A + D: quadratorum ex his differentia $2\,D\,A + Dq = B\,C$ quare $\frac{B\,C - Dq}{2\,D} = A$

vel eſto major A, minor A - F $\frac{B\,C + Fq}{2F} = A$.

Lemma pro XII. Si duobus numeris B, C, datis tertius D quæratur, qui ad utrumque adjunctus conficiat quadratum numerum, differentia ipſorum B - C eſt gnomon, cujus longitudo eſt 2 A + E, & latitudo E, Eſtque longitudinis & latitudinis ſemiſumma A + E latus quadrati majoris, & ſemidifferentia A latus quadrati minoris, ſumantur igitur duo numeri quicunque E pro latitudine, & F pro longitudine: ſic ut F E = B - C, & ex Q: $\frac{1}{2}$ F + $\frac{1}{2}$ E

$\frac{1}{2}$ E tollatur B: vel ex Q: $\frac{1}{2}$ F - $\frac{1}{2}$ E tollatur C. & reſtabit numerus D quæſitus.

Exempli gratia, ſi ſint duo quadrata A + 6 & A + 1, horum differentia 5 eſt gnomen. & quia 5 x 1 = 5 ſumatur pro latitudine gnomonis 1 & pro longitudine 5, Harum ſemiſumma 3 eſt latus quadrati majoris 9, e quo ſi tollas 6 reſtabit 3 pro numero quæſito, ſemidifferentia autem eſt 2 latus quadrati minoris, e quo ſi tollas 1 reſtabit tertium 3.

XII. Invenire numerum qui adjectus ad B & ad C complebit duos numeros quadratos. Eſtque B < C

Fieri poteſt per lemma: vel aliter.

Quadratum minus eſto Aq. quæſitus igitur numerus erit Aq - C, huic ſi addas B habebis majus quadratum ſc: Aq - C + B cujus latus eſto A - D (aſſumpto D ſic ut Dq < B - C) quare Aq - 2 D A + Dq = Aq - C + B vel $\frac{Dq + C - B}{2D}$ = A.

Tum ex Aq tolle C: eritque numerus quæſitus. Vel latus eſto A + D, aſſumpto D < √: B - C: Erit $\frac{B - C - Dq}{2D}$ = A.

XIII. Invenire numerum qui ablatus e B & C, relinquit duos numeros quadratos eſt que B < C:

Eſto quadratum minus Aq: quare C -- Aq erit numerus quæſitus. Et B - C + Aq quadratum majus. hujus latus eſt A - D aſſumpto D < √: B - C: quare Aq - 2 D A + Dq = Aq + B -- C.

Vel

Vel $\frac{Dq - B + C}{2D} = A$.

Tum e C tolle Aq eritque numerus quæſitus

Vel latus eſto $A - D$, aſſumpto $D < \surd : B - C$

Eritque $\frac{B - C - Dq}{2D} = A$.

XIV. Invenire numerum e quo ſi ſubtrahantur B & C reſtabunt bina quadrata: eritque $B < C$.
Eſto numerus quæſitus $Aq + C$, ut ſubtracto C maneat quadratum majus Aq; ſubtrahatur etiam B & reſtabit $Aq - B + C$ cujus latus eſto $A - D$ aſſumpto $D < \surd : B - C$: quare $Aq - 2DA + Dq = Aq - B + C$ vel $\frac{Dq + B - C}{2D} = A$.
Tum ad Aq adde C eritque numerus quæſitus. vel etiam fieri poteſt per Lemma.

XV. Dividere B in duas partes ſic ut Aq adjectum ad utramque partem compleat bina quadrata.
Aſſumantur C & D, ut $Cq + Dq < B$ ſitque $C < D$.

$Q : A + C.$ eſt $Aq + 2CA + Cq$: minus Aq
$Q : A + D.$ eſt $Aq + 2DA + Dq$: minus Aq } Reſtat

$2CA + Cq$
$2DA + Dq$ } B. quare $\frac{B - Dq - Cq}{2D + 2C} = A$

hæ duæ ſunt partes ipſius B
vide 24 lib: 3.

XVI. Dividere B in duas partes ſic ut quadratum $A + C$, aſſumpto $C < \surd B$ minutum utraque

traque relinquat bina quadrata. Quadratum igitur ſubducendum eſt $Aq + 2CA + Cq$ e quo ſi tollatur $2CA + Cq$ reſtabit Aq Et e quo ſi tollatur $2CA + Cq - 2DA - Dq$ aſſumpto $D > C$ Reſtabit

$Aq + 2DA + Dq$ quod eſt $Q : A + D$
vide 23 lib 3.

XVII. Invenire duos numeros in Ratione R ad S. ſic ut adjecti ad Bq compleant bina quadrata. Eſto latus minoris quadrati $A + B$. Erit quadratum minus $Aq + 2BA + Bq$. Tolle Bq reſtabit minor numerus $Aq + 2BA$

At $S . R :: Aq + 2BA . \frac{RAq + 2RBA}{S} + Bq$ quadratum majus, cujus latus aſſumpto $C < \sqrt{:}R$, eſto $CA - B$ quare $Cq\,Aq - 2CBA - Bq = \frac{RAq + 2RBA}{S} + Bq$. vel $\frac{2RB + 2CB}{SCq - SR} = A$.

XVIII. Invenire tres numeros ſic ut æquales ſint $\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5} \text{ pri.} - C + \frac{1}{7} \text{ ter.} + F \\ \frac{6}{7} \text{ ter.} - F + \frac{1}{6} \text{ ſec.} + D \\ \frac{5}{6} \text{ ſec.} - D + \frac{1}{5} \text{ pri.} + C \end{array} \right.$

Quia nullus numerus proponitur ad quem inſtituenda ſit æquatio, poterit quæſtio innumeris modis expediri; vel ſupponendo ſummam trium numerorum quæſitorum: vel aſſumendo duos numeros ad A quæſit: qui aptiſſimi pro quæſtione erunt 5 A & 6 A. atque hunc poſteriorem in hac 18 quæſtione ſequitur Diophantus

tus: quia prioris modi exemplum erit in quæſtione 19ª.

Eſto igitur primus 5 A, & ſecundus 6 A; quare 4 A - C + $\frac{1}{7}$ ter. + F = 5 A - D + A + C. vel 2 A + 2 C - D - F = $\frac{1}{7}$ ter. & $\frac{6}{7}$ ter - F + A + D = 5 A - D + A + C. Vel 5 A + C - F + A + D = 5 A - D + A + C. Vel 5 A + C - 2 D + F = $\frac{6}{7}$ tert: = 12 A + 12 C - 6 D - 6 F

$$\text{vel } \frac{-11\,C + 4\,D + 7\,F}{7} = A.$$

XIX. Dividere B in tres numeros ſic ut æquales ſint
Eſto primus A

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{4}{5}\text{ pri.} - C + \frac{1}{7}\text{ ter.} + F \\ \frac{6}{7}\text{ ter.} - F + \frac{1}{6}\text{ ſec.} + D \\ \frac{5}{6}\text{ ſec.} - D + \frac{1}{5}\text{ pri.} + C \end{array}\right.$$

Quoniam omnes tres æquationes (omiſſis iis quæ ſe mutuo perimunt) conſtituunt B: quælibet ex iis erit $\frac{1}{3}$ B quare

$\frac{1}{3}$ B + C - F - 4 A = $\frac{1}{7}$ tertii. Et

$\frac{5}{3}$ B - 6 C + 7 F + 24 A - D = $\frac{1}{6}$ ſecundi. Et

$\frac{26}{3}$ B + 29 C + 6 D - 35 F = 121 A. Ergo

$$\frac{26\,B + 87\,C + 18\,D - 105\,F}{363} = A$$

XX. Invenire tres numeros E, M, A ſic ut Aq - Mq. Mq - Eq :: 3. 1

Eſto minor E, & medius E + B cujus quadratum eſt Eq + 2 B E + Bq: tollatur Eq, differentia erit 2 B E + Bq cujus quadratum una cum Eq eſt Eq + 8 B E + 4 Bq pro quadrato maximi cujus latus (aſſumpto C convenienter)

Eſto

Eſto $E+C$. quare $Eq+2CE+Cq=Eq+8BE+4Bq$ vel $8BE-2CE=Cq-4Bq$.

vel $\frac{Cq-4Bq}{8B-2C}=E$.

XXI. Invenire duos numeros E & A ſic ut tum $Eq+A$ tum $Aq+E$ ſint numeri quadrati

Minor eſto E: & aſſumpto B quocunque latere $E+B$. fiat quadratum $Eq+2BE+Bq$: unde ſi tollas Eq reſtabit pro numero majore $2BE+Bq$: hujus quadratum $4BqEq+4BcE+Bqq$: plus E erit etiam quadratum: cujus latus (aſſumpto convenienter C) eſto $2BE-C$ Quare $4BqEq-4BCE+Cq=4BqEq+4BcE+E+Bq$: vel $4BcE+4BCE+1$ in $E=Cq-Bqq$ vel &c.

XXII. Invenire duos numeros A & E ſic ut tum $Aq-E$, tum $Eq-A$ ſint numeri quadrati
Eſto minor numerus $E+1$ cujus quadratum eſt $Eq+2E+1$ & ſublato Eq erit major numerus $2E+1$, & majoris quadratum $4Eq+4E+1$ ab hoc ſublato minore $E+1$ erit $4Eq+3E$ quod etiam eſt quadratum cujus latus eſto $3E$. Quare $9Eq=4Eq+3E$: vel $5E=3$ vel $\frac{3}{5}=E$

Hæc eſt ſolutio Diophanti: quæ non tenet niſi numerus primo aſſumptus fuerit 1, ſi vero aſſumendus Alter B, ſolvi hoc modo non poteſt:

Nos igitur generalem regulam trademus hanc

Eſto minor numerus $E+B$ cujus quadratum eſt $Eq+2BE+Bq$ & ſublato Eq erit major nu-

O merus,

merus, 2 B E + Bq, & majoris quadratum 4 Bq Eq + 4 BcE + Bqq — E — B , quod etiam eſt quadratum. cujus latus eſto 2 BE + Bq — C. Quare 4 Bq Eq + Bqq + 4 BcE — 4 BCE — 2 Bq C + Cq = 4 Bq Eq + Bqq + 4BcE-E-B. vel - Cq - 2 Bq C - 4 BCE = E - B vel Cq + B - 2 Bq C = 4 BCE — E. Quare nota quod C non debet eſſe minor quam 2 Bq. Item ſi detur B & alteruter numerus, datur Alter nam primo datur E: Deinde 2 B + Bq + √q:Q: 2 B + Bq — B — E = C.

XXIII. Invenire duos numeros a & e ſic ut tum aq + a + e tum eq + a + e ſint num: quadrati. Eſto minor E aſſumatur E + B, cujus quadratum Eq + 2 B E + Bq æquale cogitetur eq + a + e, tollatur igitur Eq + E (ſitque 2 B — 1 = C) reſtabit major (C E + Bq : hujus quadratum eſt Cq Eq + 2 Bq C E + Bqq : adponatur a & e hoc eſt 2 B E + Bq. ſumma Cq Eq + 2 Bq C E + 2 BE + Bqq + Bq erit etiam quadratus numerus. cujus latus eſto C E — D. Quare Cq Eq — 2 C D E + Dq = Cq Eq + 2Bq C E + 2 BE + Bqq + Bq

$$\text{Vel } E = \frac{2\,C\,D + 2\,Bq\,C + 2\,B}{Dq - Bqq - Bq}.$$

XXIV. Invenire duos numeros a, e ſic ut aq — a — e & eq — a — e ſint numeri quadrati

Eſto minor E. aſſume E + 1 quadratum, Eq + 2 E + 1 pro eq + a + E) tolle Eq + E reſtat E + 1 pro majore, huic adde E: & ſumma 2 E + 1 ſublata

ſublata ex Eq, reſtabit $Eq - 2E - 1$, etiam quadratus numerus. cujus latus eſto $E - 3$. quare $Eq - 6E + 9 = Eq - 2E - 1$ vel $E = \frac{5}{2}$

Cæterum hæc ſolutio Diophantæa imperfecta eſt, concludit enim ſolummodo quod $eq - a - e$ eſt numerus quadratus: de reliqua vero quæſtionis parte quod $aq - a - e$ ſit quadratus numerus nihil probatur omnino. quod vero in hoc exemplo utraque pars vera eſſe contingit, gratia ipſi numero 3 poſteriori aſſumpto habenda eſt, quem non artificio ſed tentando invenit.

Veram igitur & generalem ſolutionem exhibeo Eſto minor numerus E: aſſume $E - B$ quadratum erit $Eq - 2BE + Bq$, pro $eq - a - e$ tolle ex $Eq - E$ (ſitque $B - 1 = C$) reſtabit $CE - Bq$ pro majore: quadratum erit. $Cq\,Eq - 2CBqE + Bqq$ hinc tolle $(a + e)$ $2BE - Bq$ etiam quadratus numerus cujus latus eſto $CE - D$. quare $Cq\,Eq - 2CDE + Dq = Cq\,Eq - CBqE - 2BE + Bqq + Bq$

$$\text{Vel } E = \frac{Dq - Bqq - Bq}{2CD - 2CBq - 2B}$$

quare Dq non debet eſſe minor quam $Bqq - Bq$.

XXV. Invenire duos numeros a & e ſic ut Q: $a + e, - a$ & Q: $a + e, + e$ ſint numeri quadrati.

Aſſumantur tres quadrati numeri puta 4, 9, 16, & minimus 4 tollatur e reliquis: differentiæ erunt 5 & 12.

Tum ſummæ quadratum eſto 4 Aq. Et major

numerus eſto 12 Aq & minor 5 Aq horum ſumma eſt 17 Aq cujus quadratum eſt 289 Aqq = 4 Aq : vel Aq = $\frac{4}{289}$ hac interpretatione pro 12 Aq & 5 Aq duo numeri erunt $\frac{48}{289}$ & $\frac{20}{289}$.

XXVI. Invenire duos numeros a & e, ſicut Q: a + e, - a & Q: a + e, - e ſint quadrati numeri

Aſſumantur tres quadrati numeri, puta 4, 9, 16, & duo minores tollantur e majore, eruntque differentiæ 12 & 7, Tum ſummæ quadratum eſto 16 Aq. Et major numerus eſto 12 Aq minor 7 Aq, reliqua fiant ut in 25.

XXVII. Invenire duos numeros a & e ſic ut ae + a & ae + e ſint numeri quadrati quorum latera ſimul conſtitunt Z. Eſto primus numerus A : ſecundus Bq A - 1. rectangulum ex his Bq Aq - A. cui ſi addas primum, eritque Bq Aq cujus latus eſt B A, Tum rectangulo etiam addatur ſecundus (ſitque Bq - 1 = C) eritque ſumma Bq Aq + C A - 1 quadratus numerus cujus latus juxta conditionem quæſtionis eſt Z - B A. Quare Zq - 2 Z B A + Bq Aq = Bq Aq + C A - 1 Vel

$$2\,Z\,B\,A + C\,A = Zq + 1. \text{ vel } \frac{Zq + 1}{2ZB + C} = A.$$

XXVIII. Invenire duos numeros a & e, ſic ut ae - a & ae - e ſint numeri quadrati quorum latera ſimul conſtituunt Z. Eſto primus numerus A ſecundus Bq A + 1. rectangulum ex his Bq Aq + A cui ſubtrahas primum; reſtabit Bq Aq cujus

cujus latus eſt B A. Tum e rectangulo etiam ſubtrahatur ſecundns (ſitque Bq - 1 = C) & reſtabit Bq Aq - C A - 1, numerus etiam quadratus, cujus latus juxta conditionem quæſtionis eſt Z - B A Quare

$$Zq - 2\,ZBA + Bq\,Aq = Bq\,Aq - CA - 1$$

$$\text{Vel } A = \frac{Zq + 1.}{2\,ZB - C}$$

XXIX. Invenire duos quadratos aq & eq ſic ut tum aq eq + aq tum aq eq + eq ſint quadrati numeri

Eſto primus Aq, pro ſecundo (donec idoneus inveniatur) ponatur 1. rectangulum erit Aq: prior ſumma 2 Aq : poſterior Aq + 1 quare neutra eſt quadratus numerus, quærendus eſt igitur numerus cujus quadratum auctum unitate ſit etiam quadratus numerus. Eſto autem ille A - B cujus quadratum Aq - 2 B A + Bq = Aq + 1 vel $A = \frac{Bq - 1}{2B}$: cujus quadratum (ſumpto Bq - 1 = C) eſt $\frac{C\,q}{4\,Bq}$.

Quare Cq + 4 Bq eſt Q.

Eſto igitur ſecundus ille idoneus quem inſtituebamus quærere $\frac{C\,q}{4\,B\,q}$ Rectangulum erit $\frac{Cq\,Aq}{4\,Bq}$ ſumma prior $\frac{CqAq + 4\,BqAq}{4\,Bq}$ numerus quadratus, quia Cq + 4 Bq quadratusducitur in Aq. ſumma

ſumma poſterior $\frac{Cq\ Aq + Cq}{4\ Bq}$ erit etiam quadratus numerus quia Cq Aq + Cq eſt quadratus numerus cujus latus eſto C A - D quare

$$Cq\ Aq - 2\ C\ D\ A + Dq = Cq\ Aq + Cq.$$

$$\text{Vel. } A = \frac{Dq - Cq}{2\ C\ D}$$

Quare ſit Bq $\prec$ 1 : & Dq $\prec$ Cq.

XXX. Invenire duos numeros aq & eq ſic ut tum aq eq - aq. tum aq eq - eq ſint numeri quadrati.

Eſto primus Aq ſecundus 1 ut ante donec idoneus inveniatur : rectangulum erit Aq differentia prior C poſterior Aq - 1 quærendus eſt igitur numerus cujus quadratum minutum unitate ſit numerus quadratus. Eſto autem ille A - B cujus quadratus Aq - 2 B A + Bq = Aq - 1 : vel $\frac{Bq - 1}{2\ B}$ = A : cujus quadratus ſumpto Bq + 1 = C eſt $\frac{C\ q :}{4\ Bq}$ quare Cq - 4 Bq eſt quadratus numerus. Eſto igitur ſecundus ille idoneus $\frac{C\ q :}{4\ Bq}$

Rectangulum erit $\frac{Cq\ Aq}{4\ Bq}$; differentia prior $\frac{Cq\ Aq - 4Bq\ Aq}{4\ Bq}$ numerus quadratus quia C q - 4 Bq quadratus ducitur in Aq : poſterior $\frac{Cq\ Aq - Cq}{4\ Bq}$ erit etiam quadratus quia Cq Aq - Cq

- Cq eſt quadratus cujus latus eſto CA - D quare Cq Aq - 2 CDA + Dq = Cq Aq - Cq.

$$\text{Vel } A = \frac{Dq + Cq}{2CD}.$$

XXXI. Invenire duos numeros a & e ſic ut a e + a + e & a e - a - e ſint numeri quadrati.

Propterea quod aq + eq + 2 a e = ξq & aq + eq - 2 a e = xq: ſumantur duo latera puta 3 & 2, ſumma quadratorum ex ipſis eſt 13 & duplum rectangulum 12 eſtque tum 13 + 12 tum 13 - 12 numerus quadratus. Eſto igitur rectangulum ſub numeris quæſitis 13 Aq, & numerus primus A, ſecundus erit 13 A: Quare cum propoſitæ A & 13 A ſint pro a & e: & 13 Aq pro a e, & tum 13 Aq + 12 Aq -, tum 13 Aq - 12 Aq, ſint numeri quadrati ſicut etiam ſunt a e + a + e, & a e - a - e ſequitur 12 Aq eſſe pro a + e quare 12 Aq = 13 A + A vel 12 A = 14

Vel A = $\frac{7}{6}$.

XXXII. Invenire duos numeros a & e, ſic ut tum a + e tum a e + a + e tum a e - a - e ſint numeri quadrati.

Propterea quod a in 2 a bis = 4 aq, ſumantur duo numeri in Ratione 1 ad 2, puta 2 ad 4. rectangulum ſub ipſis duplum erit num: quadra: nempe 16. Eſtque ſumma quadratorum ex ipſis 20: quare 20 + 16, & 20 - 16 ſunt N: Q.

Eſto igitur rectang: ſub numeris quæſitis 20 Aq, & numerus primus 2 A: ſecundus erit

A. Eſtque per oſtenſa in 31 quæſt: 16 Aq pro[…] a 4 e erit 16 Aq = 12 A vel A = $\frac{3}{4}$.

XXXIII. Invenire tres numeros a, e, i, ſic[…] ut aq + e tum eq + i tum iq + a ſint quadrati[…] numeri.

Propterea quod differentia duorum proximorum quadratorum eſt minus latus duplicatum, plus 1; Eſto primus numerus A ſecundus erit 2 A + 1 & tertius 4 A + 3; patet igitur quod Aq + 2 A + 1, & 4 Aq + 4 A + 1 pl: 4 A + 3, hoc eſt 4 Aq + 8 A + 4 ſint quadrati numeri; adeo ut tertii quadratum 16 Aq + 24 A + 9 + A, hoc eſt 16 Aq + 25 A + 9, erit quadratus numerus: latus ejus eſto 4 A - B: quare 16 Aq - 8 B A + Bq = 16 Aq + 25 A + 9

$$\text{Vel } \frac{Bq - 9}{25 + 8B} = A.$$

XXXIV. Invenire tres numeros a, e, i ſic ut tum aq - e tum eq - i tum iq - a ſint quadra[…]ti numeri.

Propterea quod differentia duorum proximorum quadratorum eſt majus latus duplicatum, minus 1. Eſto primus numerus A + 1 ſecundus 2 A + 1 & tertius 4 A + 1. Patet igitur quod Aq + 2 A + 1 mi: 2 A + 1 & 4 Aq + 4 A + 1 mi: 4 A + 1 ſint numeri quadrati. Patet igitur quod 16 Aq + 8 A + 1 mi: A + 1, hoc eſt 16 Aq + 7 A eſt quadratus numerus, latus eſto B A: quare Bq Aq = 16 A + 7 A.

Ve[…]

Vel $\frac{7}{Bq - 16} = A$.

A + B. 2 B A + Bq. 4 B c A + Aqq.

XXXV. Invenire tres numeros a, e, i ſic ut tum aq + a + e + i tum eq + a + e + i, tum iq + a + e + i ſint numeri quadrati.

Propterea quod per 5 e 2, Q: $\frac{1}{2}$ A - $\frac{1}{2}$ E: + Æ = Q: $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ E. Aſſumantur Z planum & B C = Z pl: & D F = Z pl: & G H = Z pl: quare tum Q: $\frac{1}{2}$ B - $\frac{1}{2}$ C + Z pl. tum Q: $\frac{1}{2}$ D - $\frac{1}{2}$ F + Z planum tum Q: $\frac{1}{2}$ G - $\frac{1}{2}$ H + Z pl: ſunt numeri quadrati.

Eſto igitur ſumma trium numerorum Z pl: Aq ipſi numeri (juxta conditionem quæſtionis)

Erunt $\frac{1}{2}$ B A -- $\frac{1}{2}$ C A + $\frac{1}{2}$ D A -- $\frac{1}{2}$ F A + $\frac{1}{2}$ G A -- $\frac{1}{2}$ H A.

Quare $\frac{1}{2}$ B A -- $\frac{1}{2}$ C A + $\frac{1}{2}$ D A -- $\frac{1}{2}$ F A + $\frac{1}{2}$ G A -- $\frac{1}{2}$ H A = Z pl: Aq

Vel $\frac{B - C + D - F + G - H}{2 Z pl.} = A$.

XXXVI. Invenire tres numeros a, e, i, ſic ut tum aq mi: a + e + i, tum eq mi: a + e + i, tum, iq, mi: a + e + i ſint numeri quadrati.

Propterea quod $\frac{1}{4}$ Zq -- Æ = $\frac{1}{4}$ Xq aſſumantur Z pl: & B C = Z pl: & D F = Z pl: & G H = Z pl: quare tum Q: $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2}$ C: - Z pl: tum Q: $\frac{1}{2}$ D + $\frac{1}{2}$ E -- Z pl: tum Q: $\frac{1}{2}$ G + $\frac{1}{2}$ H - Z pl:

pl: ſunt numeri quadrati. Eſto igitur ſumma trium numerorum quæſitorum Z pl: Aq; ipſi numeri (juxta conditionem quæſtionis) erunt

$$\tfrac{1}{2}BA + \tfrac{1}{2}CA + \tfrac{1}{2}DA + \tfrac{1}{2}FA + \tfrac{1}{2}GA + \tfrac{1}{2}HA = Z\,pl: Aq.$$

$$\text{Vel } \frac{B+C+D+F+G+H}{2\,Z\,pl.} = A.$$

FINIS. Libri Secundi.

QUÆSTIONES
Libri III.
Diophanti Alexandrini.

INVENIRE a, e, i, ſic ut tum a + e + i -- aq: tum a + e + i - eq tum a + e + i -- iq ſint Q: numeri.

Eſto primus A: ſecundus B A. ſumma quadratorum ex ipſis Bq Aq + Aq, dividatur per l. 2, 10 in duos alios quadratos nempe Cq Aq + Dq Aq, tertius eſto D A qui ſi addatur ad duos primos ſumma erit A + B A + D A = Bq Aq + Aq Quare $\frac{B + D + 1}{Bq + 1}$ = A. Nam quia per fabricam tum Bq Aq + Aq in Aq: Bq Aq + Aq in Bq Aq: tum Bq Aq + Aq in Dq eſt numerus quadratus. ſic ſumma trium illorum numerorum quorum latera ſubtrahuntur ſit Bq Aq + Aq factum eſt quod poſtulatur at ſumma eſt B + D + 1 Ergo.

I. Invenire a, e, i ſic ut tum a + Q: a + e + i tum e + Q: a + e + i tum i + Q: a + e + i ſit numerus quadratus.

Eſto ſumma trium A, cujus quadratum Aq & ſumptis tribus numeris B C. D (3, 8 15) ſic

ſic ut ſingulis adjuncta 1 conſtituat quadratum numerum. ſunto tres numeri quæſiti B Aq, C Aq, D Aq, quorum ſumma eſt B Aq + C Aq + D Aq at ſumma ipſorum ponitur A.

$$\text{Quare } \frac{1}{B+C+D.} = A.$$

III. Invenire a, e, i, ſic ut tum Q: a + e + i in a, tum Q - a + e + i in e, tum Q: a + e + i in i ſit Q: numerus.

Eſto ſumma trium B A cujus quadratum eſt Bq Aq & ſumptis tribus numeris C D F, ſic ut ſinguli ablati ex Bq relinquant numerum quadratum: puta tres numeri quæſiti C Aq, D Aq, F Aq quorum ſumma eſt C Aq + D Aq + F Aq at ſumma ipſorum ponitur B A

$$\text{quare } \frac{B}{C+D+F} = A.$$

IV. Invenire a, e, i, ſit ut a - Q: a + e + i, tum e - Q: a + e + i tum i - Q: a + e + i ſit numerus quadratus.

Eſto ſumma trium A cujus quadratum Aq, & ſumptis tribus numeris B, C, D (2, 5, 10,) ſic ut 1 dempta e ſingulis relinquat quadratum numerum, ſunto tres numeri quæſiti B Aq, C Aq, D Aq, quorum ſumma eſt B Aq + C Aq + D Aq at ſumma ipſorum ponitur A

$$\text{quare } \frac{1}{B+C+D.} = A.$$

V. In

. Invenire tres numeros, a, e, i, ſic ut tum ſumma a + e + i tum tres differentiæ a + e - i tum e + i - a tum i + a - e ſint Q: numeri.

ſto ſumma trium quadratum Aq + 2 B A + Bq: item a + e - i eſto quadratus aliquis numerus puta Bq, Jam quia datur ſumma trium & differentia primi & ſecundi a tertio datur etiam tertius, ſublata enim differentia e ſumma, (nam a + e + i - a - e + i = 2 i) reſtat tertius duplus Aq + 2 B A eſt igitur tertius $\frac{1}{2}$ Aq + B A.

tem e + i - a Eſto quadratus aliquis numerus puta Aq differentiam hanc tolle de ſumma erit primus duplus. (nam a + e + i -- e -- i + a) = 2 B A + Bq eſt igitur primus B A + $\frac{1}{2}$ Bq. ſumma primi & tertii, $\frac{1}{2}$ Aq + 2 B A + $\frac{1}{2}$ Bq, ſubtracta e ſumma trium Aq+2BA+Bq relinquit $\frac{1}{2}$ Aq + $\frac{1}{2}$ Bq pro ſecundo.

Quare i + a - e erit 2 B A quadratus etiam numerus, eſto ille Cq : eſt igitur 2 B A = Cq.

$$\text{Ideoque } \frac{Cq}{2B} = A \text{ vide: } 6^{am}.$$

VI. Vel etiam ſic. Propterea quod a + e - i pl : e + i - a. pl: i + e - a = a + e + i Inveniantur per lemma ſequens tres numeri quadrati quorum ſumma eſt quadratus numerus. ſintque 4, 9, 36, quorum ſumma eſt 49. ſumantur tres illi numeri pro tribus differentiis $\frac{49-4}{2}$, $\frac{49-9}{2}$, $\frac{49-36}{2}$ hoc eſt 22 $\frac{1}{2}$, 20, & 6 $\frac{1}{2}$ ſunt tres numeri quæſiti.

Lemma

Lemma: Invenire tres numeros quadratos, quorum ſumma etiam ſit quadratus numerus. Eſt primus Aq: pro ſecundo aſſumatur Bq & pr ſumma omnium Aq + 2 CA + Cq eſt igitur tertius 2 CA + Cq aſſumatur autem pro terti Dq quare 2 CA + Cq = Dq: vel $\frac{Dq - Cq}{2C} =$ A. ſi B ſit 3, C, 1. D, 2. prodibunt ut ante 4, 9, 36.

VII. Invenire tres a, e, i ſic ut tum a + e + tum a + e tum e + i tum i + a ſint numeri quadrati.

Eſto ſumma trium Aq + 2 BA + Bq & ſumma primi & ſecundi Aq, quare tertius 2 BA + Bq: Iterum ſumma ſecundi & tertii Aq - 2 BA + Bq, hanc tolle ex Aq + 2 BA + Bq, manebit primus 4 BA, hunc tolle ex Aq manebit ſecundus Aq - 4 BA hunc etiam tolle ex Aq + 2 BA + Bq manebit 6 BA + Bq ſumma tertii & primi, numerus quadratus cujus latus aſſumatur C, Quare 6 BA + Bq. = Cq

Vel $\frac{Cq - Bq}{6B} =$ A vide 8^am^.

VIII. Aliter, Eſto ſumma trium Aq + 2 BA + Bq: & ſumma primi & ſecundi Aq. quare tertius 2 BA + Bq. iterum eſto ſumma ſecundi & tertii Aq - 2 BA + Bq, tolle tertium & manebit ſecundus Aq - 4 BA tolle ex Aq & manebit primus 4 BA, huic addatur tertius erit

erit $6BA + Bq$, ſumma tertii & primi cujus latus aſſumatur C.

X. Invenire tres a, e, i, ſic ut tum $a - e = e - i$, ſuntque tres ſummæ tum $a + e$ tum $e + i$ tum $i + a$ Numeri quadrati.

nveniantur per Lemma ſequens tres numeri quadrati, Bq, Cq, Dq ſic ut $Bq - Cq = Cq - Dq$. ſumantur hi tres pro tribus ſummis numerorum quæſitorum. Eſto ſumma trium A. Erit primus $A - Dq$ & ſecundus $A - Cq$ & tertius $A - Bq$. ſumma igitur omnium erit $3A - Bq - Cq - Dq = A$

$$\text{Vel } \frac{Bq + Cq + Dq.}{2} = A.$$

emma: Invenire tres numeros quadratos æqualis exceſſus.

ſto primus Aq: ſecundus $Aq + 2FA + Fq$ tertius $Aq + 4FA + 2Fq$: qui etiam quadratus eſt numerus: cujus latus eſto $A - G$. quare $Aq - 2GA + Gq = Aq + 4FA + 2Fq$.

$$\text{Vel } \frac{Gq - 2Fq}{2G + 4F} = A.$$

quare G debet eſſe major quam 2 F: ſi ſumatur F 1, & G 8

$$\text{Erit } \frac{Bq\ 2401.\ Cq\ 1681,\ Dq.\ 961.}{100.}$$

. Invenire tres a, e, i, ſic ut tum $a + e + B$ tum $a + i$ B tum $e + i + B$, tum $a + e + i + B$ ſit numerus quadratus.

Aſſuman-

Aſſumantur ad A tres numeri C, D, F, ſic u ipſorum quadrata excedant B. Et primo A + C cujus quadratum Aq + 2 C A + Cq eſto a + e + B quare Aq + 2 C A + Cq - B, eſt ſumma prim & ſecundi. ſecundo A + D cujus quadratum Aq + 2 D A + Dq, eſt e + i + B. quare Aq + 2 D + Dq - B eſt ſumma ſecundi & tertii. Terti A + F, cujus quadratum Aq + 2 F A + Fq eſto + e + i + B : Quare Aq : + 2 F A + Fq : - B eſt ſumma omnium trium. tolle inde Aq + 2 C A + Cq - B ſummam primi & ſecundi reſtab tertius 2 F A - 2 C A + Fq - Cq. Item tolle in de Aq + 2 D A + Dq - B, ſummam ſecundi & tertii reſtabit primus 2 F A - 2 D A + Fq - D Hinc tolle ex Aq + C A + Cq - B ſummam pri mi & ſecundi reſtabit ſecundus Aq + 2 C A 2 D A + 2 F A + Cq + Dq + Fq - B.

Jam vero ſumma tertii & primi & B eſt 4 F A - C A - 2 D A + 2 Fq - Cq - Dq + B quadratus nu merus, cujus latus eſto G. quare 4 F A - 2 C A - 2 D A + Fq - Cq - Dq + B = Gq.

$$\text{Vel } \frac{Gq + Cq + 2\,Dq - 2\,Fq - B}{4F - 2C - 2D} = A.$$

Si aſſumatur B 3, C 2, D 3, F 4, G 10. erit A, 1:

XI. Invenire tres a, e, i, ſic ut a + e - B, tum e + i B: tum i + a - B tum i + e + i - B. ſit quadra tus numerus. Eſto Aq + B, ſumma primi & ſecundi, aſſumantur duo numeri C & D: E primo A + C, cujus quadratum Aq + 2 C A Cq + B: eſto ſumma ſecundi & tertii. Deinc

e

e A + D, cujus quadratum Aq + 2 D A + Dq + B eſt ſumma trium. tolle inde ſummam primi & ſecundi reſtabit tertius 2 D A + Dq. item tolle inde ſummam ſecundi & tertii, reſtabit primus 2 D A - 2 C A + Dq - Cq. Hunc tolle ex Aq + B ſumma primi & ſecundi reſtabit ſecundus Aq - 2 D A + C A - Dq + Cq + B. Jam vero ſumma tertii & primi, dempto B eſt 4 D A + 2 D C - 2 C A - C q - B quadratus numerus cujus latus eſto F. Quare 4 D A + 2 D - 2 Cq - B = Fq. Vel

$$\frac{Fq + Cq - 2D + B}{4D - 2C} = A \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ſi } B\ 3.\ C\ 1,\ D\ 1 \\ F\ 8:\ \text{Erit } A\ 10. \end{array} \right.$$

XII. Invenire tres numeros a, e, i, ſic ut tum a e + B tum e i + B : tum i a + B. ſit numerus quadratus.

Inveniantur per Lemma ſequens duo numeri quadrati ſic ut uterque addito B conſtituat quadratum numerum. Sintque Cq & Dq.

Eſto igitur primus Cq A ſecundus $\frac{1}{A}$, tertius Dq A : ſic fiet enim ut tum $\frac{Cq\,A + B}{A}$ tum tum $\frac{Dq\,A + B}{A}$ ſit quadratus numerus: erit & B Cq Dq Aq + B quadratus numerus cujus latus eſto CD A + F unde $\frac{B - Fq}{2CDF} = A.$

Lemma invenire aq, eq ſic ut tum aq + B : tum

Q eq

eq + B ſit num: quadrat: fieri poteſt, vel per L: 2: 11: ſi aſſumatur G & pro a ponatur A & pro e A + G vel A - H æquationes erunt $\frac{B - Gq}{2G} = A = \frac{B - Hq}{2H}$: Si numerus datus ſit 12, aſſumptis numeris 2, & 3, quadrati inventi erunt 4 & $\frac{1}{4}$. Aliter ex gnomone 12 quærendus eſt A dupl: aſſumantur pro E duo quilibet numeri minores quam latus 12 puta 2 & 3:

Tollatur Eq è 12 reſtabit duplex rectangulum 8 vel 3 rectangulum igitur ſimplex 4 vel $\frac{3}{2}$ dividatur per E 2 vel 3 & quotus erit 2 vel $\frac{1}{2}$ pro A.

XIII. Invenire tres a, e, i, ſic ut tum a e - B: tum ei-B tum i a - B: ſit quadratus numerus.

Inveniantur per Lemma ſequens duo numeri quadrati ſic ut uterque dempto B conſtituat quadrat: numerum ſintque Cq & Dq. Eſto igitur primus Cq A : ſecundus $\frac{1}{A}$: tertius Dq A : ſic enim fiet ut tum $\frac{Cq A}{A}$ - B, tum $\frac{Dq A}{A}$ - B ſit quadratus numerus: Erit & Cq Dq Aq -B qnadratus numerus cujus latus eſto C D A-F: Unde $\frac{B + Fq}{2CDF}$ = A. (B 10)

Lemma invenire aq, eq ſic ut tum aq - B: tum eq - B: ſit numerus quadratus. pro a ponatur

tur A & pro c A - G vel A - H æquationes erunt $\frac{B + Gq}{2G} = A = \frac{B + Hq}{2H}$ ſicut in Lemmate præcedente.

Aliter ex gnomone quærendus eſt A + E. aſſumantur pro E duo quivis numeri minores quam √ 10 puta 1 & 2.

Eritque A vel $5 \frac{1}{2}$ vel $3 \frac{1}{2}$.

XIV. Invenire a, e, i, ſic ut tum ae + i tum ei + a tum ia + e ſit numerus quadratus, Eſto primus A & aſſumpto A + 2 B, fiat e quadratum Aq + 4 B A + 4 Bq. ſit tertius Bq. rectangulum ſub ſecundo & tertio auctum primo eſt Bq A + A + 2 B c & rectangulum ſub tertio & primo auctum ſecundo eſt Bq A + A + 2 B quæ duo quia cogitantur eſſe quadrata quorum differentia eſt 2 B c -- 2 B quæ ranturper L:2:11 bini quadrati numeri diſtantes. intervallo 2 B c - 2 B, ſitque major Cq = Bq A + A + 2 Bc & minor Dq = Bq A + A + 2 B

Quare $\frac{Cq - 2\,B\,c}{Bq - 1} = A = \frac{Dq - 2\,B.}{Bq - 1}$

XV. Invenire a, e, i, ſic ut tum ae -- i tum ei - a tum ia -- e ſit numerus quadratus.

Eſto primus A, ſecundus A + Bq: horum rectangulum eſt Aq + Bq A: eſtque tertius Bq A. Rectangulum ſub ſecundo & tertio imminutum primo Bq Aq + Bqq A - A Rectangulum ſub tertio & primo imminutum ſecundo eſt Aq - A - Bq quæ duo quia cogitantur eſſe quadrata ſint [illegible]

Q 3 ad

ad Bq Aq ideoque differentia Bqq A + B q (per Lemma ad 12 lib: 2.) eſt gnomon cujus longitudo ſit $2BA + \frac{2}{B}$ & latitudo $\frac{Bc}{2}$ harum ſemiſumma $BA + \frac{1}{B} + \frac{Bc}{4}$ eſt latus quadrati majoris Bq Aq + Bqq A - A) & ſemidifferentia $BA + \frac{1}{B} - \frac{Bc}{4}$ latus quadrati minoris. Bq Aq-A-- - Bq. quibus computatis atque comparatis, utraque æquatione prodibit. $\frac{Bqq\,cc + 8\,Bqq + 16}{8\,cc - 8\,Bq}$ = A. Ardua ſed ſi B ſit 2 ſatis eſt facilis.

XVI. Invenire a, e, i ſic ut tum ae + iq tum ei + aq tum ia + eq ſit numerus quadratus. Eſto primus B A ſecundus 4 B A + 4 C tertius C. Rectangulum ſub primo & ſecundo auctum quadrato tertii eſt 4 Bq Aq + 4 B C A + Cq = Q: 2 B A + C. Rectangulum ſub ſecundo & tertio auctum quadrato primi 4 Cq + 4 B C A + Bq Aq = Q: B A + 2 C, Rectangulum ſub tertio & primo auctum quadrato ſecundi eſt 16 Bq Aq + 33 BAC + 16 Cq cujus latus eſto 4 BA - D hinc invenietur $\frac{Dq - 16\,Cq}{33\,BC + 8\,BD}$ = A.

XVII. Invenire a, e, i, ſic ut tum ae + a + e tum ei + e + i tum ia + i + a ſit quadratus numerus.

Quia factus a duobus quadratis proximis auctus ipſorum

ipſorum ſumma eſt etiam quadratus numerus Aſſumptis igitur B & C = B + 1 ſit primus Bq ſecundus Cq & eſto tertius A. Quare Bq Cq + Bq + Cq eſt quadratus numerus ſed & Cq A + Cq + A. & Bq A + Bq + A cogitentur eſſe quadrati eſtque διπλοισότης ad A ideoque differentia Cq A - Bq A + Cq - Bq (per Lemma ad 12 lib 2) eſt gnomon. cujus longitudo eſt A + 1 & latitudo (Cq - B) harum ſemiſumma eſt $\frac{1}{2}$ A + C; ſemidifferentia $\frac{1}{2}$ A - B Quare vel $\frac{1}{2}$ Aq + C A + Cq = Cq A + A + Cq. vel $\frac{1}{4}$ Aq + B A + Bq = Bq A + Bq + A. Quare 4 Cq - 4 - 4 C - 4 = A = 4 Bq + 4 - 4 B.

XVIII. Invenire tres a, e, i ſic ut tum a e + a + e tum a + e + i tum i a + i + a ſit quadratus numerus.

Propterea quod 1. Cq : : B + 1. B Cq + Cq. ſunt B & B Cq + Cq - 1 duo numeri quibus ſi addatur 1 erunt ut 1 ad Cq nempe ut quadratus ad quadratum. Eſto igitur primus B A. ſecundus B Cq + Cq - 1 vel numerus (poſito ſi placet B 2 & Cq 4) erit primus 2 A ſecundus 8 A + 3 a e + a + e eſt 16 Aq + 16 A + 3 quadratus numerus cujus latus eſto 4 A - 2 ſic ut mulctæ quadratum majus ſit quam abſolutus 3 quare 16 Aq - 16 A + 4 = 16 Aq + 16 A + 3 vel $\frac{1}{32}$ = A. Atque hac exhibita interpretatione, primus eſt $\frac{1}{16}$: ſecundus $\frac{13}{4}$ Eſto tertius A. Eritque e i + e + i $\frac{17}{4}$ A + $\frac{13}{4}$, & i a + i + a $\frac{17}{16}$ A + $\frac{1}{16}$: Dico utrumque

que eſſe quadratum numerum. Nam quia $\frac{17}{4} = \frac{13}{4} + 1$ ſunt per præmiſſa ut Cq ad 1 ita Q: ad Q ideoque uterque ducatur in A. Ducatur igitu $\frac{17}{4}$ A + $\frac{13}{4}$, & $\frac{17}{16}$ A + $\frac{13}{16}$ in duos numeros qu ſiut ut 1 ad Cq puta 4 ad 16 facti erunt 17 A + 13, & 17 A + 1 eſtque διπλοισότης: & differen tia 12 = 2 x 6 quorum ſemiſumma eſt 4, ſemi differentia 2. Quare vel 17 A + 13 = 16 ve 17 A + 1 = 4. Eſtque $\frac{3}{17}$ = A tertio.

Nec diſſimilis foret operatio ſi ſtatueretur terti us non a purum ſed a multiplex. & nota quo non neceſſe erat in 18 duxiſſe $\frac{17}{4}$ A + $\frac{13}{4}$ A & $\frac{17}{16}$ -- $\frac{13}{16}$ in 4 & 16 quadratos. nec in 19 duxiſſe A -- $\frac{2}{5}$, & $\frac{2}{3}$ A - $\frac{1}{3}$ in 4 & 9 quadratos ſed in nu meros ipſis ſimiles.

XIX. Invenire tres a, e, i ſic ut tum a e - a - tum e i -- e -- i tum i a - i - a ſit quadratu numerus.

Aſſumptis binis quadratis numeris 4 & 9 quibuſ cunque, Eſto primus 4 A + 1. ſecundus 9 A + 1 ut ſubducto utrinque 1 reſtet quadratum a e-a-e. eſt & 36 Aq - 1 quadratum cujus latu ſit 6 A -- 1 utcunq; aſſumptum: 36 Aq - 12 A + = 36 A -- 1 vel A = $\frac{1}{6}$. Quare primus eſt $\frac{5}{3}$ ſe cundus: $\frac{5}{2}$: tertius eſt A.

e i -- e - i eſt $\frac{3}{2}$ A -- $\frac{5}{2}$ in 4 = 6 A -- 10
i a -- i -- a eſt $\frac{2}{3}$ A - $\frac{5}{3}$ in 9 = 6 A - 15.

quia $\frac{3}{2}$. $\frac{2}{3}$ :: 9. 4: fiat multiplicatio ipſorum

A

$\frac{3}{2}$ A- $\frac{5}{2}$ & $\frac{2}{3}$ A - $\frac{5}{3}$ in duos numeros 4. & 9. Eritque inter factos 6 A-10 & 6 A-15, διπλοισότης differentia autem eſt 5 = 5 x 1 quorum laterum ſemiſumma eſt 3 & ſemidifferentia 2 Quare 6 A - 10 = 9 & 6 A - 15 = 4 ideoque $\frac{19}{6}$ = A tertio.

X. Invenire duos a, e. ſic ut tum a e + a tum a e + e tum a e + a + e ſit quadratus numerus.

ſto primus A, ſecundus 4 A - 1. Quare a e + a eſt 4 Aq: qui eſt quadratus numerus. Item a e + e, 4 Aq + 3 A - 1: & 4 Aq + 4 A - 1 debent eſſe quadr: numeri: Eſtque διπλοισότης & differentia A vel 4 A x $\frac{1}{4}$ (oportet enim aſſumere 4 A ut in ſemiſummæ & ſemidifferentiæ quadratione habeatur 4 Aq) quadratum ſemiſummæ eſt 4 Aq + $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{64}$ = 4 Aq + 4 A - 1, & quadratum ſemidifferentiæ 4 Aq - $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{64}$ = 4 Aq + 3 A - 1. Eſtque A $\frac{65}{224}$.

XI. Invenire duos a, e, ſic ut tum a e - a tum a e - e tum a e - a - e ſit quadratus numerus.

ſto primus 4 A ſecundus A + 1: tres reliqui erunt 4 Aq: 4 Aq - 3 A - 1 4Aq-A-1 qui duo poſteriores cogitantur quadra: numeri: eſt que διπλοισότης differentia 4 A = 4 A x 1 Eritque A = $\frac{5}{4}$.

XII. Invenire quatuor a, e, i, o, ſic ut tum Q: a + e + i + o tum Q: a + e + i + o - a: tum &c:

Propterea

Propterea quod in triangulo rectangulo Hq = Cq + Bq : & Cq + Bq + 2BC = Q: C + B & Cq + Bq - 2 C B = Q: C - B : ſi quærantur quatuor triangula rectangula, eandem habentia hypotenuſam (hoc eſt ſiquadratus numerus dividatur quater in binos quadratos) & pro ſumma quatuor numerorum quæſitorum ſtatuatur hypotenuſa ducta in A, & pro numeris ipſis ſtatuantur quatuor plana ſub lateribus rectis quatuor illorum triangulorum duplicata & ducta in Aq : prodibit inter hypotenuſam & quatuor illa plana duplicia æqualitas præſtitura quæſitam poteſtatem ut ſi quatuor triangula ſint H CB, Hcb, H κ β, H γ δ. Erit HA = 2 C B Aq + 2 c b Aq + 2 κ β Aq + 2 γ δ Aq.

Et quidem in 8 Lib: 2 oſtenſum eſt dividere numerum quadratum datum in duos quadratos : Verum ut illud in integris fiat, hoc excogitavit artificium.

Expoſitis his binis quadratis 4 × 1 & 9 × 4 duo triangula rectangula in minimis terminis fabricata, 5, 4, 3, & 13, 12, 5. tum ducta in utramque alterius hypotenuſam duo alia efficient, 65, 60, 25, & 65, 52, 39 deinde expoſitorum quadratorum ſummis in ſe ductis nempe 4 + 1 in 9 + 4 producentur quatuor quadrata proportionalia, 36 + 16 + 9 + 4. Quare (per) 65 = Q 6 + 2 + Q 4 - 3 : Et. 65 = Q: 6 - 2 + Q: 4 + 3. Poſtremo ex horum laeribus fabricantur

tur duo triangula rectangula 65, 16, 63 & 65, 56, 33 Inventa ſunt igitur in numeris integris quatuor triangula rectangula ad eandem Hypotenuſam.

FINIS. Libri Tertii.

DE TRIANGULIS PLANIS RECTANGULIS.

I. QUia Aq.mi: Æ = XA. Et Æ mi: Eq = X
Erit.

I. Aq. + B mi : Æ + B = XA. Et.

Æ + B mi : Eq + B = XA. Et.

$$\frac{Aq + B}{X} - \frac{\AE + B}{X} = A. \text{ Et.}$$

$$\frac{\AE + B}{X} - \frac{Eq + B}{X} = E. \text{ Et.}$$

$$\frac{Aq + B}{X} + \frac{Eq + B}{X} - \frac{2\AE + 2B}{X} = X.$$

$$2Z + 2Xq = 4\AE + 4Xq.$$

II. Hinc licet invenire tres numeros, ſic ut fa tus a duobus quibuſlibet ex iis, minutus v auctus dato numero (ſecundum ſignorum ex gentiam) erit quadratus numerus. Tres num ri ſunto $\frac{Aq + B}{X}$, $\frac{Eq + B}{X}$, & $\frac{2Aq + 2B}{X}$

$\frac{2Eq + 2B}{X}$ vel $4\,\frac{\AE + 4B}{X} + X$.

Dic

Dico 1° $\frac{Aq+B}{X}$ mi: $\frac{Eq+B}{X}$ $+ B = Q: \frac{Æ+B}{X}$

Nam $Aq + Eq - Xq = 2Æ$.

Dico 2° $\frac{Aq+B}{X}$ in $\frac{4Æ+4B}{X} + X : + B = Q\, \frac{Aq+B}{X}$ $+ \frac{Æ+B}{X}$.

Nam per interpretationem ipſius A ſuperius traditum eſt.

: $\frac{Aq+B}{X} - \frac{Æ+B}{X} : = Aq = \frac{Aq+B}{X}$ in $X + B$. At

: $\frac{Aq+B}{X} - \frac{Æ+B}{X}$. pl: $\frac{Aq+B}{X}$ in $\frac{4Æ+4B}{X} = Q: \frac{Aq+B}{X} + \frac{Æ+B}{X}$

Dico 3° $\frac{Eq+B}{X}$ in $\frac{4Æ+4B}{X} + X : + B = Q:$ $\frac{Æ+B}{X} + \frac{Eq+B}{X}$.

Nam per interpretationem ipſius E ſuperius traditum eſt.

$\frac{Æ+B}{X} - \frac{Eq+B}{X} = Eq = \frac{Eq+B}{X}$ in $X + B$.

Q: $\frac{Æ+B}{X} - \frac{Eq+B}{X}$. pl. $\frac{Eq+B}{X}$ in $\frac{4Æ+B}{X}$ $= Q: \frac{Æ+B}{x} + \frac{Eq+B}{x}$.

I. Ex aſſumptis duobus numeris A, E. procrecreantur tres alij numeri. Aq. & Eq. & 2 Aq. + 2 Eq. + 2 Xq vel 4 Æ + 4 Xq. ſic ut factus a duobus quibuſvis ex iis auctus facto ex Xq, ſive per ſummam eorundem ſive per tertium ſit quadratus numerus.

Dico 1° Aq Eq pl. Aq Xq + Eq Xq = Q Æ + Xq
Nam quia Aq + Eq = 2 Æ + Xq. Erit.

Aq Xq + Eq Xq = 2 Æ Xq + Xqq. Addantur utrobique Aq Eq.

Dico 2° Aq Eq pl. 4 Æ Xq + Xqq = Q: Æ + 2 Xq
Nam Q: Æ + 2 Xq = Aq Eq + 4 Æ Xq + 4 Xqq.

Dico 3° 4 Aq Æ + 4 Aq Xq pl. Aq Xq + 4 Æ Xq + 4 Xqq = Q: Aq + Æ + 2 Xq.

Nam Q: Aq + Æ = 4 Aq Æ + Aq Xq quia Aq + E = 2 Æ + Xq. Quare Q: Aq + Æ + 2 Xq = 4 A Æ + Aq Xq + 4 Aq Xq + 4 Æ Xq + 4 Xqq.

Dico 4° 4 Aq Æ + 4 Aq Xq pl: Eq Xq = Q: Aq Æ + Xq. Nam Q: Aq + Æ + Xq = 4 Aq Æ + Aq Xq + AqXq + 2 Æ Xq + Xqq. Eſt Aq + Eq = 2 Æ + Xq..

Dico 5° 4 Eq Æ + 4 Eq Xq pl. Eq Xq + 4 Æ Xq + Xqq = Q: Æ + Eq + 2 Xq.

Nam Q: Æ + Eq = 4 Eq Æ + Eq Xq &c. Sicut ii tertio.

Dico 6° 4 Eq Æ + 4 Eq Xq pl. Aq Xq = Q: E + Æ + Xq. Nam Q: Æ + Eq = 4 Eq Æ + E Xq. &c. ſicut in 4°

IV. Ex aſſumptis duobus numeris A, E, procre antur tres alij numeri Aq + 2 Xq, & Eq + Xq, & 2 Aq + 2 Eq + 4 Xq. vel 4 Æ + 6 X. Sic ut factus à duobus quibuſvis ex iis minutu facto ex Xq, ſive per ſummam eorundem ſi per tertium ſit quadratus numerus.

Dic

Dico 1° Aq + 2 Xq mi: Eq + 2Xq in Xq in Aq + Eq + 4 Xq = Q: Æ + Xq, hoc eſt.

Aq Eq + 2 Aq Xq + 2 Eq Xq + 4 Xqq - Aq Xq - Eq Xq - 4Xqq = Aq Eq + 2 Eq Xq + Xqq. Nam Aq + Eq = 2 Æ + Xq.

Dico 2° Aq + 2 Xq in Eq + 2 Xq in Xq in 4 Æ + 6 Xq = Q: Æ, hoc eſt Aq Eq + 2 Aq Xq + 2 Eq Xq + 4 Xqq - 2 Aq Xq - 2 Eq Xq - 4 Xqq = Aq Eq.

Dico 3° Aq + 2 Xq in 4 Æ + 6 Xq in Xq in Aq + 4 Æ + 8 Xq = Q: Aq + Æ + 2 Xq. Nam Q: Aq + Æ + 2 Xq = 4 Aq Æ + Aq Xq, + 4 Aq Xq, + 4 Æ Xq + 4 Xqq.

Dico 4° Aq + 2 Xq in 4 Æ + 6 Xq in Xq Eq + 2Xq = Q: Aq + Æ + 3Xq, hoc eſt 4 Aq Æ + 6 Aq Xq + 8 Æ Xq + 12 Xqq - EqXq - 2 Xqq = 4 AqÆ + Aq Xq + 6 Aq Xq + 6 Æ Xq + 9 Xqq. Nam Aq + Eq = 2 Æ + Xq.

Dico 5° Eq + 2 Xq &c: ſicut in 3°.

Dico 6° Eq + 2 Xq &c: ſicut in 4°.

V. Ordinatum eſt in cap. 18. Clau. Math. quod Q: $\frac{A+E}{2}$ = Q: $\frac{A-E}{2}$ + Æ. Et Q: Aq + Eq = Q: Aq - Eq + 4 Æq.

At vero in triangulo rectangulo Hq = Bq + Cq: per 47 e.i.

Aſſumptis igitur binis numeris A, E, triangulum rectangulum licet fabricare: hoc modo,

A, E	. Aq	. Eq.
Vel $\frac{A+E}{2}$	. $\sqrt{Æ}$	. $\frac{A-E}{2}$

Vel

Vel Aq + Eq . 2 Æ . Aq - Eq.
Hypotenuſa . Cathetus . Baſis.

Et quia continuè proportionales ſunt, tum A. √ Æ. E. tum Aq. Æ. Eq: triangulum rectangulum conſtituent trium continue proportionalium, vel medius cum mediorum ſemiſumma atque ſemidifferentia: vel medius duplex cum ſumma atque differentia eorundem: uti in ſuperiore exemplo liquet.

VI. In triangulo rectangulo, ſumma hypotenuſæ & baſis, cathetus, & differentia hypotenuſæ & baſis ſunt ∺

Nam hypotenuſæ & baſis ſumma eſt 2 Aq: & differentia 2Eq; quare. Item hypotenuſæ & catheti ſumma eſt Zq. differentia Xq. Item laterum circa rectum ſumma eſt ZA + XE: differentia ZE ∾ XA. Item laterum circa rectum & hypotenuſæ ſumma eſt 2 Æ + Aq: Et differentia 2 Æ - Eq.

Invenire duos illos numeros, ex quibus triangulum rectangulum fabricatur.

Latus unius rectum hypotenuſæ tum addes tum auferes: erunt ſemiſummæ & ſemidifferentiæ √q, duo numeri quæſiti. ut △ 13, 12, 5, numeri fabricatores ſunt $\sqrt{\frac{13+5}{2}}$ & $\sqrt{\frac{13-5}{2}}$ hoc eſt 3 & 2. vel etiam ſunt $\sqrt{\frac{13+12}{2}}$ & $\sqrt{\frac{13-12}{2}}$.

Refer huc 13.

VII. Si

VII. Si duo numeri quadrati alios duos numeros quadratos multiplicent, uterque utrumque, quatuor facti erunt quadrati proportionales: eorumque omnium ſumma componitur ex quadratis ſummæ laterum extremorum, & differentiæ mediorum: vel ex quadratis differentiæ laterum extremorum & ſummæ mediorum.

Sunto quatuor quadrati factores, Cq, Dq, Fq, Gq. Ex his facti erunt Cq Fq. Cq Gq :: Dq Fq. Dq Gq. horum autem ſumma eſt vel $Q:CF + DG: + Q:CG - DF:$ vel etiam

$$Q:CF - DG: + Q:CG + DF.$$ Nam

$$Q:CF + DG = Cq\,Fq + \underline{2\,CFDG} + Dq\,Gq.$$

$$Q:CG - DF = Cq\,Gq - 2\,CGDF + Dq\,Fq.$$

item

$$Q:CF - DG = Cq\,Fq - 2\,CFDG + Dq\,Gq.$$

$$Q:CG + DF = Cq\,Gq + 2\,CGDF + Dq\,Fq.$$

VIII. Atque hinc (& quia ſi trianguli latera tria ducantur in eundem numerum, fit novum triangulum ſimile) datis duobus triangulis rectangulis diſſimibus, HCB & hcb duo alia triangula rectangula poterunt fabricari. Ex. gr.

$$Hqhq = Hqcq + Hqbq. =$$

$$Cqcq + Bqcq :: Cqbq + Bqbq.$$ Quare.

$$Hqhq = Q:Cc + Bb: + Q:Bc - Cb.$$

$$Hqhq = Q.Cc - Bb.: + QBC + Cb.$$

Hypoten; Latera circa rectum angulum

Refer huc 14.

IX. Invenire

IX. Invenire tria triangula rectangula ſic ut ſolidus ſub cathetis ad ſolidum ſub baſibus ſit ut quadratus numerus ad quadratum numerum.

	H	C	B
Sunto tria triangula.	Hq + Cq.	2 HC.	Hq-Cq = Bq
	Hq + Bq.	2 HB.	Hq-Bq = Cq.

Factus à tribus cathetis eſt 4 Hq Cq in B.
Factus à tribus baſibus eſt Bq Cq in B.

Nota quod ſolidi variari poſſunt quadrifariam.

X. Invenire duo triangula rectangula, ſic ut planus ſub cathetis, minutus plano ſub baſibus conſtituat numerum quadratum, cubicum, quadrato-quadraticum, &c.

Sumantur 2 C $<$ B ſintque

	H	C	B
Duo triangula.	4 Cq + Bq.	4 CB	4 Cq-Bq.

Hic differentia planorum ſub cathetis & baſibus eſt B c. Sed ſi trianguli poſterioris latera applicentur ad B, differentia foret Bq. Si vero multiplicentur per B foret Bqq. Si per Bq, foret Bq c. Et ſic de reliquis.

XI. Invenire duo triangula rectangula ſic ut planus ſub cathetis, auctus plano ſub baſibus, conſtituat numerum. Q: C: QQ^um^ : &c.

Sumantur B $<$ 2 C. ſintque.

H	C	B
Bq + 4 Cq.	4BC.	Bq-4Cq.

Hic ſumma planorum ſub cathetis & baſibus eſt B c. Sed ſi trianguli poſterioris latera adplicentur

ad

ad B vel ducantur in B: vel in Bq: &c. Summa foret numerus Q^us vel QC^us &c.

XII. Invenire tria triangula rectangula, ſic ut ſolidus ſub hypotenuſis, ad ſolidum ſub Cathetis, ſit ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Inveniantur per alterutram è proxime præcedentibus, duo triangula ſic ut planus ſub cathetis minutus, vel etiam auctus plano ſub baſibus, conſtituat numerum quadratum. Et ex duobus illis fabricetur tertium, ſumendo pro Catheto Cc-Bb vel etiam Cc + Bb & ſic utrobique tiangulum tertium erit $\frac{4CqH+BqH.}{B}$ Bq. 3 $\frac{CBq+4cCq.}{B}$

XIII. Cq + Bq [Hq] + 2 CB = QC + B Et Cq + Bq [Hq] -- 2 CB = Q: C-B.

XIV. Liquet ex 7 ſi duorum quadratorum ſumma, ducatur in ſummam duorum aliorum quadratorum, factus componetur bis ex binis quadratis nempe ex quadrato ſummæ laterum à duobus factis extremis cum quadrato differentiæ laterum à duobis factis mediis, & ex quadrato differentiæ laterum à duobus factis extremis, cum quadrato ſummæ laterum à duobus mediis, ut in exemplo.

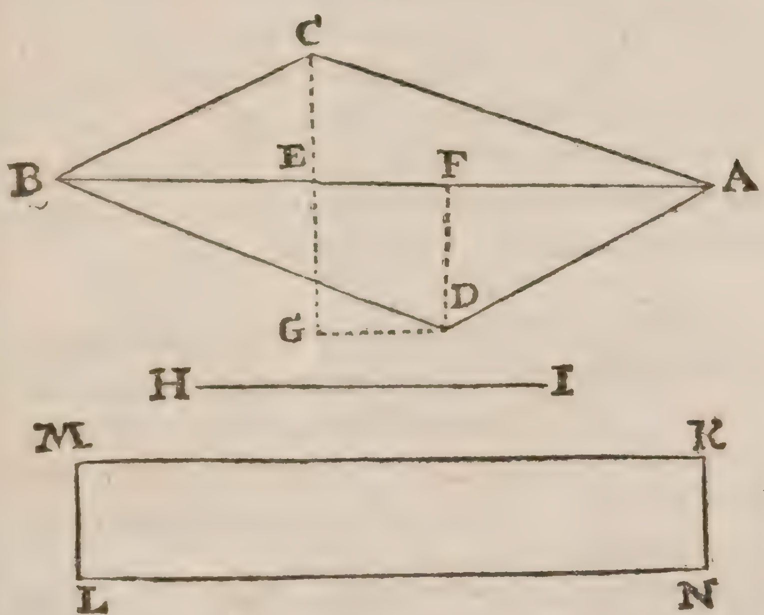
9 + 4 in 25 + 9
225 + 81 + 100 + 36 = 442
15 . 9 :: 10 . 6

Q: 15 + 6 =	441	Q: 15 - 6 =	081
Q, 10 - 9 =	001	Q: 10 + 9 =	361
	442		442

DE

Diviſione Superficierum.

I. CONſtituere rectangulum (ſive quadratum ſive oblongum) æquale figuræ rectilineæ



trilateræ vel quadrilateræ, &c. Eſto quadrilaterum ABCD cui æquale rectangulum conſtituendum eſt, ab angulo A in oppoſitum B ducta recta AB. ex reliquis angulis C & D

demittantur perpendiculares CE & DF [1] quarum aggregatum eſt CG tum,[2] fiant ½ AB. HI. CG ∸ quare [3] HIq. = quadrilatero ABCD ſi vero velis rectangulum altitudinis K L ipſi æquale. fiat, KL: ½ AB: CG:: KM eritque [4] LM. = ABCD.

Et ſimiliter pergendum eſt, ſi plura eſſent latera; inſtituenda enim ita eſt proportio ut ſemibaſis & altitudo plani dati fiat medii termini; hinc etiam poteris rectangulo alicui dato vel adjicere vel auferre portionem æqualem alteri rectilineo dato, per lineam lateri alterutri ipſius rectanguli parallelam. Nota quod in omnibns quadrangulis rectilineis ipſæ triangulorum altitudines rationem habent ipſorum triangulorum ut [5] △ CBA. △ DBA :: CE. DF.

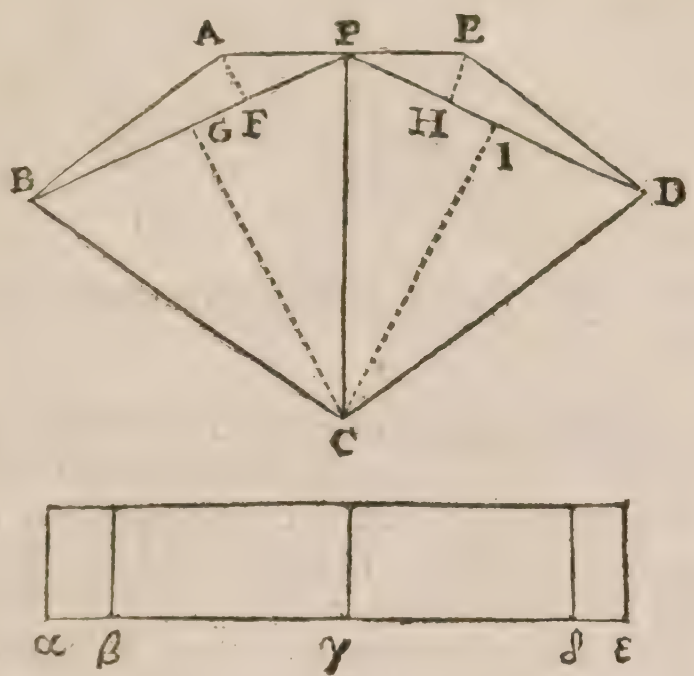
II. Diviſo rectilineo aliquo in triangula lineas rectas ipſis triangulis ordine proportionales invenire. [1] Quinquangulum ABCDE. dividatur ex puncto P in quatuor triangula PAB. PBC. PCD. PDE. & in ſingulis demittantur perpendiculares. AF. CG. CI. EH.

Sumptaque qualibet altitudine ζ fiat. ζ : ½ PB :: AF : $\alpha\beta$. & ζ; ½ PB :: CG. $\beta\gamma$. & ζ : ½ PD :: CI : $\gamma\delta$. & ζ : ½ PD:: EH : $\delta\varepsilon$. quare linea $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ diviſa eſt in ratione triangulorum in quinqangulo. & rectangulum totum $\zeta\varepsilon$ æquale eſt ipſi quinquangulo.

1 34. e. 1. 2 13. e. 6. 3 17. e. 6. & Sch: 41. e. 1. 4 16. e. 6. 5 Sch. 1. e. 6.

Atque

Atque hoc modo faciendum eſſet, ſi polygonum datum dividendum foret in triangula non ex uno puncto ſed prout convenientius fieri pote-

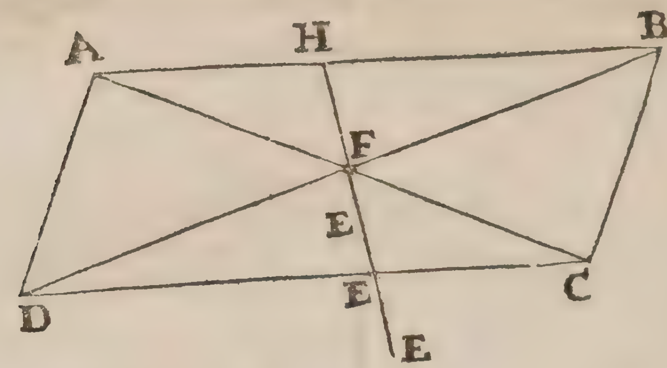


rit. quod in ejuſmodi polygonis ſæpenumero evenit. quæ aliquos ex angulis ſuis habent exterius ut in ſchemate quinto videre licet.

II. Parallelogrammum biſecare à quocunque puncto. Sive punctum illud extra ſit ſive intra parallelogrammum. Sit biſecandum ABCD. & punctum aſſignatum E. ductis diagoniis AC

& BD

& BD interſecantibus ſe invicem in F ducatur



EH [1] quæ ipſum parallelogrammum biſecabit.

IV. Datum triangulum rectilineum ſecare quacunque ratione à puncto extra triangulum; ſit triangulum ABC ex quo abſcindendus eſt è puncto D triens. Ducatur DEA & ſegmentum CE majus ſit ratione data ducatur DF parallela baſi BC concurrens cum AC producta in F. Tum ſumpto CG triente ipſius A C. Fiat ut in Schemate.

(FD : CB :: CG : CH i.e.) FD × CH = CB × CG.

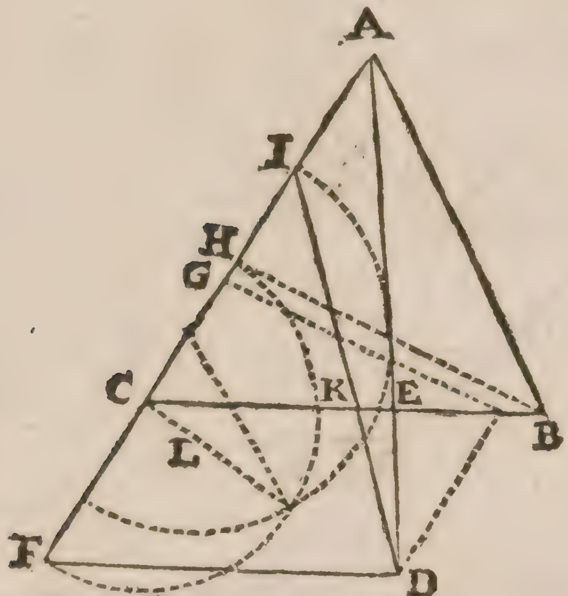
Et FC : L : CH ∺ per 13 e 6.

Et ($\frac{1}{2}$ CH baſis trianguli rectanguli cujus cathetus L & Hypotenuſa fiat radius circuli tranſeuntis per I adeoque = $\frac{1}{2}$ CH + HI. Quare CI vel CH + HI : L : HI ∺ i e.)

[1] 26. e. 1.

CH

CH × HI + HIq = [Lq vel] FC × CH Quare. [CH + HI i e] CI : FC :: CH : HI per 16 e 6 Ergo componendo inverſe IC : CH :: [IF : IC :] FD. CK. Quare CI × CK = (CH × FD =) C

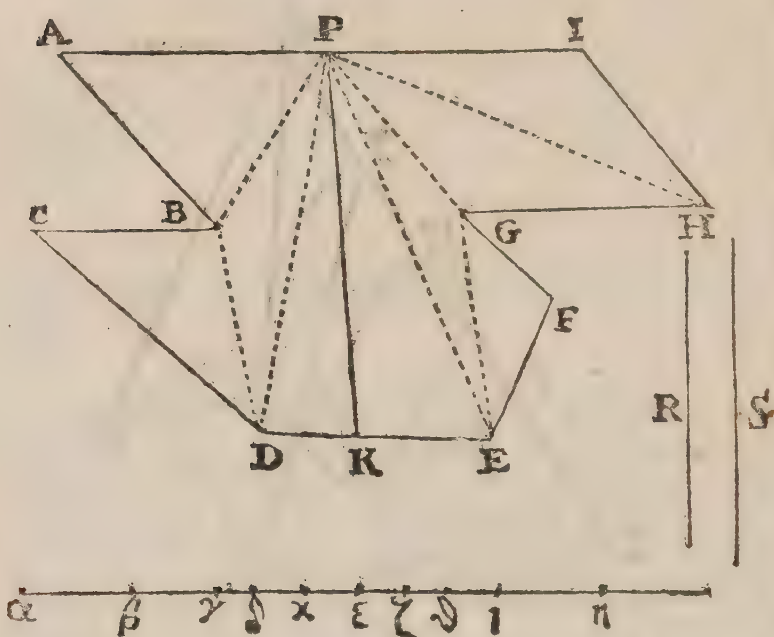


B × CG. At CI × CK : CA × CB : △ICK : △ACB per 23 e 6 Ergo CG : CA :: △ICK : △ACB Atqui CG fuit $\frac{1}{3}$ CA Ergo.

Aut per 23 e 6 △ICK : △ACB :: (CI × CK : CA × CB :: CG × CB : CA × CB :: CG.CA ::) $\frac{1}{3}$ 1

V. Datum Polygonum irregulare ABCDEFGHI dividere è puncto P ratioue data Rad S. diviſo polygono in triangula. PAB. BCD. PBD. PDE. PEG. GEF. PGH. PHI. Ipſis triangulis inveniantur lineæ ordine proportionales. $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \kappa\ \theta$

ζηθιη diviſa αη in κ ratione R ad S dividatur DE baſis Δ^i PDE [cui reſpondet δϑ] in puncto, ut DK : KE :: δκ. κε. ducta igitur linea PK dividetur polygonum ratione R ad S. hoc mo-



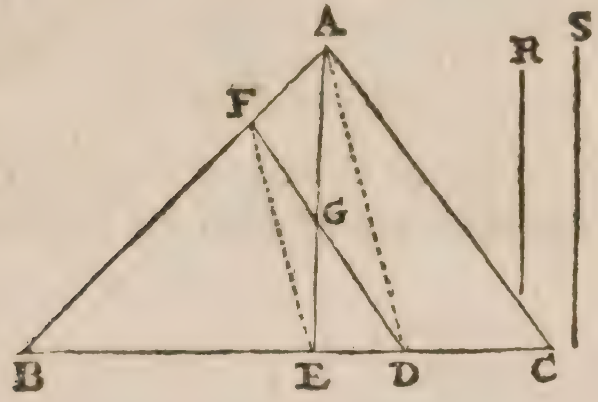
do poteris ſecare polygonum in quotvis partes æquales vel inæquales.

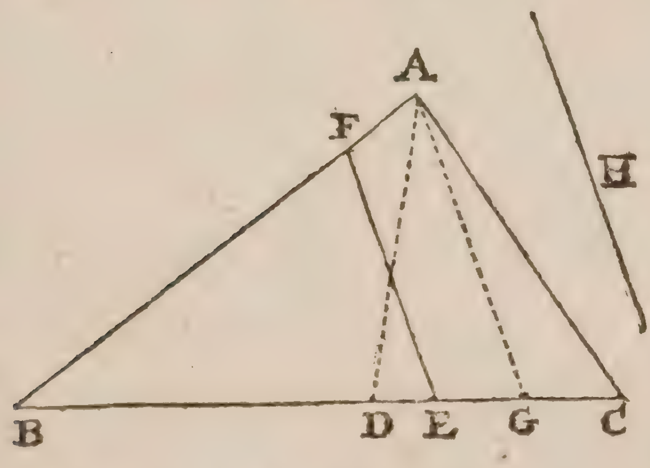
VII. Datum triangulum ex puncto dato in latere dividere in ratione data. Sit datum Δ ABC dividendum ex puncto D ratione S ad R. fiat S : R : BE : EC. ductiſque ex angulo A. AD & AE & ipſi AD parallela EF. pro-

tra-

trahatur FD perquam fiet diviſio poſtulata. eſt enim [1] BE : EC :: FBD. AFDC. Nam △ AGF = DGE. ut in Schemate proximo.

VII. Datum triangulum dividere in ratione data per lineam lateri alicui parallelam: dividatur △



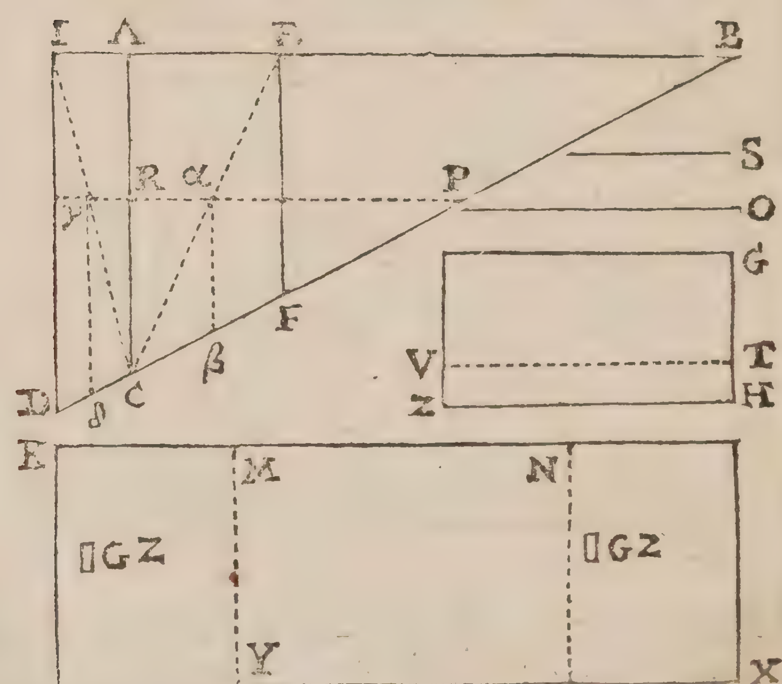


ABC ratione S ad R perlineam parallelam lateri AC. [3] fiat S : R :: BE : EC fiant etiam BE : BD. BC ∺ ductaque DF parallela lateri AC

1 1. e. 6. 2 37. e. 1. 3 13. e. 6.

erit [15] BE : FC (=BC - BE) :: FBD : AFDC· (=ABC - FBD.) Si vero △ ABC dividi poſtuletur Ratione S ad R. per lineam parallelam rectæ H. tum fiat S : R :: BD : DC fiant etiam BD : BE : BG ∺ ductaque EF parallela ipſi AG. erit BD : DC :: FBE : AFEC. probatio pendet ex duplicata proportione. Nam ABG : FBE :: BG : BD :: ABG : ABD. quare FBE = ABD. ideoque ADC = AFEC.

VIII. E Triangulo abſcindere interius Trapezium æquale rectangulo dato. Sit è Triangulo



ABC abſcindendum Trapezium ACFE æquale ▯ GZ.

[1] 19. e. 6. Et Cor. 9. e. 5.

Con-

Conſtructio. fiat LX : HZ :: GH : LN.

1 ie [] NX = [] GZ.

2 [] MX = △ ABC.

3 LM : O : MN ∺

4 LM : O :: BA : BE.

5 EF ∥ AC.

Demonſtratio : 6 △ BAC : △ BEF :: LM : MN::

7 [] MX : [] MX - [] NX.

∵ 8 △ BAC : △ BAC-△ BEF [=ACFE] :: [] MX NX [9] [=GZ]

10 △ BAC : [] MX :: ACFE : [] GZ. ie. ACFE=[] GZ. q. e. d.

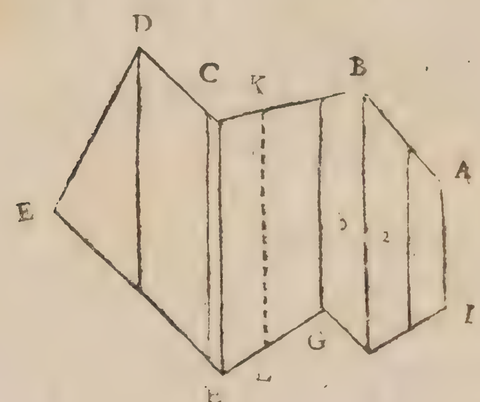
XIX. Triangulo adjungere exterius Trapezium = rectangulo dato. Triangulo ABC. adjungendum ſit Trapezium ACDI = [] GZ. [2] △° ABC = conſtituatur [] MX fiatque [1] LX : HZ :: GH MK. fiant [3] LM : LQ : LK ∺ & [4] LM : LQ :: BA : BI. & ducatur [5] ID ∥ AC. Demons: [6] △ BAC : △ BID :: LM : LK : ∵ [8] △ BAC : ACDI :: LM : KM :: [] MX : [] GZ ∵ ACDI = [] GZ. q. e. d.

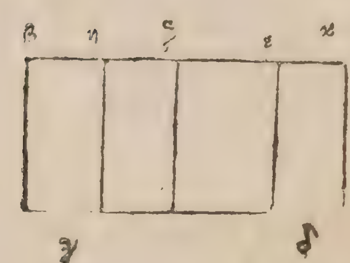
X. Quod ſi in Triangulo ABC. punctum concurſus B non habeatur ſumpto P puncto in latere CB, [5] ducatur PR ipſi AB parallela. [4] fiatque CA : CR : S ∺ & [4] CA : S :: GH : HT. ducaturque TV. quare [11] △ BAC : △ PRC : [] GZ

1 25. e. 6. 2 44. e. 1. 3 13. e. 6. 4 11. e. 6. 5 31. e 1. 6 19. e. 6. 7 1. e. 6. 8 2 Cor. 19. e 5. 9 Conſtr. 10 16. e. 5. 11 19. 20. e. 6.

□TZ. conſtituatur ergo [1] $CR\alpha\epsilon$ vel, [2] $CR\gamma\delta$ æqua[...] □TZ. & ducantur diagonii $C\alpha E$ & $C\gamma I$ & paralleli EF. & ID. &c.

XI. E Polygono rectilineo ABCDEFGHI abſcindere portionem = rectangulo $\alpha\gamma$ per lineam parallelam lateri AI. diviſo polygono in Trapezia, diſtinguatur etiam rectangulum in



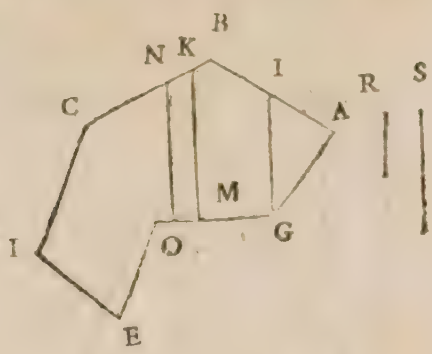


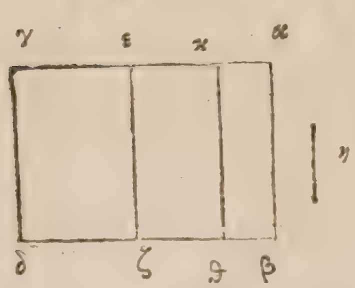
æqualia rectangula 1. 2. 3. tandem relinquatur rectangulum $\gamma\varkappa$, cui ex polygono trapezium 4 æquale per 9. auferendum eſt. Igitur, &c.

[1] 9. hujus. [2] 10 hujus.

XII.

XII. Quod ſi polygonum rectilineum ABCDEF G dividendum ſit ratione. R ad S fiat rectangulum $\alpha\beta\gamma\delta$ æquale ipſi polygono & dividatur rectangulum in eadem ratione per lineam



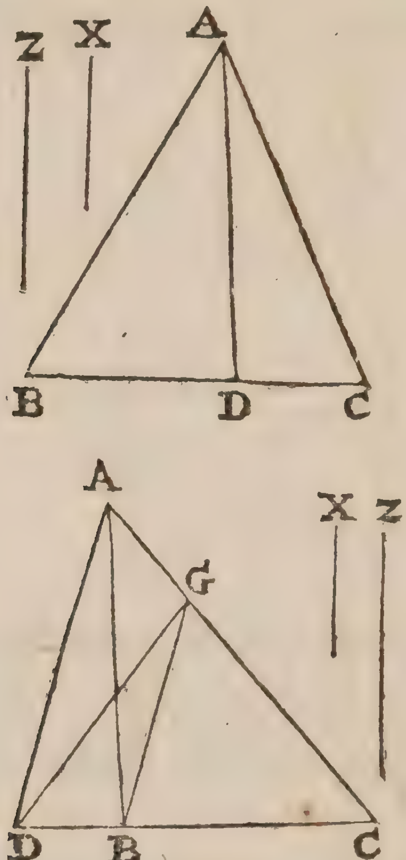


$\varepsilon\zeta$. ductaque GI ‖ propoſitæ H fiat □ $\alpha\vartheta$ = △AIG. & trapezium GIKM = $\theta\varepsilon$. poſtremo fiat trapezium MN. = △BKL per 9 & 10. eſt igitur polygoni portio ABNMG = □ $\alpha\xi$.

XIII. A puncto in ambitu rectilineæ figuræ ſive in angulo ſive in latere quolibet ſumpto rectam lineam ducere quæ ipſam dividat in partes datam habentes proportionem.

Figuram

Figuram autem rectilineam nunc intelligo quæ totidem lateribus quot angulis continetur. Si △ABC. ſit data proportio X ad Z. Si per lineam ab angulo dividendus eſt [1] partire ejus baſim ſecundum X ad Z. ſc: in D. & [2] duc AD

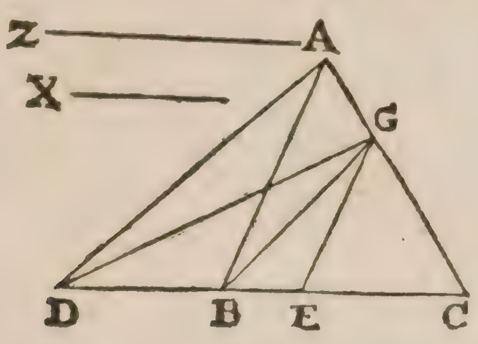


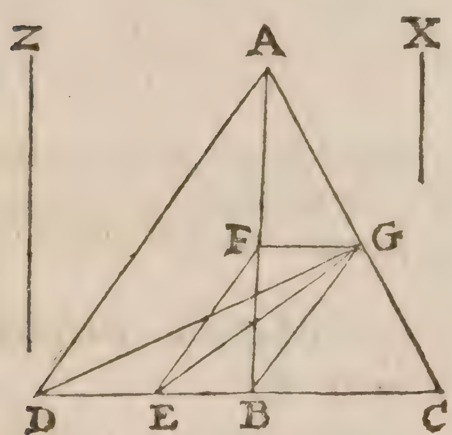
& ſic de reliquis angulis & baſibus. Sumatur in latere AC. puuctum G. unde dividendum eſt triangulum duc GB. & [3] ei ‖ AD ab A. concur

1 10. e. 6. 2 1. poſt. e. 1: & 1. e. 6. 3 31. e. 1.

r

rat CB in D. tum duc DG. ∵ [4] △GDC ≐ △ dato ABC quare ſi [1] diviſa DC. ſcm X ad Z cadat diviſio in B linea BG dividit ſin eadat diviſio inter BC in E tum ducta linea [5] GE problema abſolvet. Sin cadat diviſio inter DB in E duc



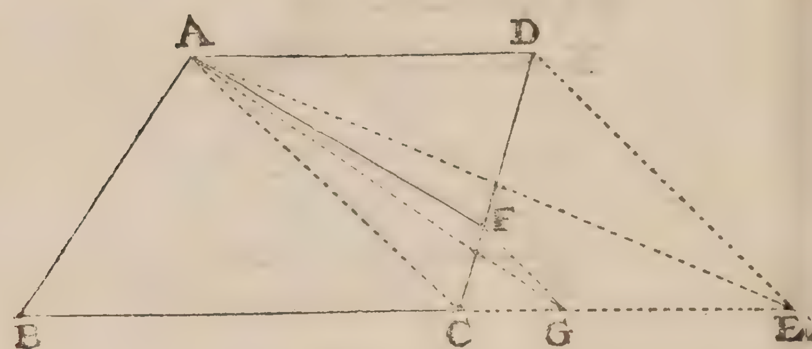


EF ∥ ipſi AD & ubi ſcindit AB ſc. in F duc FG quæ problema abſolvet nam [4] △ ABG ≐ △ DBG cujus pars eſt DEG item [4] GEB ≐ GFB. ∵ reliquæ partes. DEG = AFG.

5 1.e.6. 6 ax: e.1.]

Sit

Sit quadrangulum ABCD ex cujus angulo A dividendum eſt ſecundem X ad Z ducdiametrum AC& DE ei || jungatur AE ∴ △ ABE = ABC D. Si igitur diviſio cadat in G. ducatur[3] GF

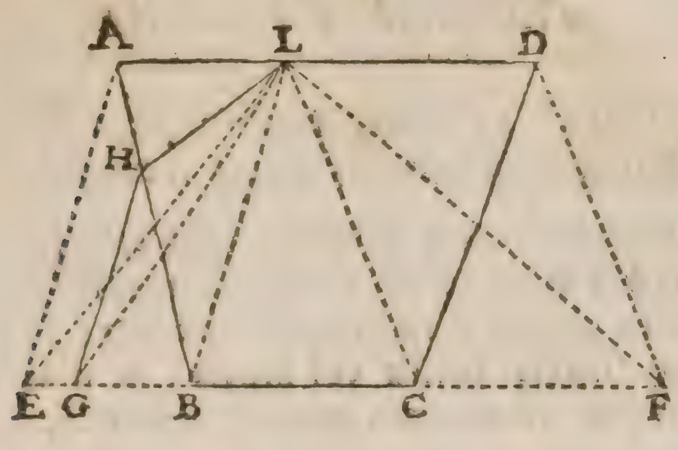


|| AC & tum ducatur ad concurſum cum CD linea AF quæ abſolvet opus nam △ ACE = A DC item partes[4] ACG = AFC ∴ reliquæ AGE & ADF.

Si cadat in C vel inter CB ductalinea ad A problema abſolvet, &c.

Sit datum in latere punctum L & △ LEF = quadrangulo ABCD cadat diviſio in G extra B duc lineam GL & a G in AB. duc[3] GH || ipſi LB tum ducatur HL quæ faciet problema nam in triangulis ALB ELB : BLH : HLA :: [5] (BH

HA



HA :: BG : GE ::) BLG : GLE. Sed BLH : = BLG ∴ HLA = LEG.

Idem eſt ſi cadat diviſio extra C. Sin intra BC facillimum eſt.

Muſicæ Elementa.

I. SOnus fit ex motu, tremore, percuſſione, au fragore corporum, aerem tremefaciente.

II. Corpus magis denſum tremit velocius, ſicu chorda ænea nervo, & nervus intenſus remiſſo Item corpus minus tremit velocius: ſicut nervus magis tenuis vel brevis, & tibia mino propter velociorem motum aeris illiſi.

III. Tremor velocior facit ſonum acutiorem tardior vero graviorem. Nam cum acumen & gravitas ſint qualitates ſonorum fiunt etiam à qualitatibus & magnitudinibus corporum aerem motu tremefacientium.

IV. Qualitas ſoni diverſificatur ex qualitate materiæ, magnitudine corporis, & forma inſtrumenti, unde ſequitur, ut ænea chorda quam nervus, & ænea tibia quam plumbea vel lignea ſonet acutius. Item nervus ſubtilior & brevior, & fiſtula anguſtior acutiorem edat ſonum. Et ſi denſitates corporum magnitudinibus ſuis fuerint recipocæ, generabunt ſonos uniſonos.

V. Aer tremefit à nervo: Et viciſſim nervus ab aere ad eundem tenorem tremente. Hinc fi ut intactæ cytharæ nervus, ſecundum motum nervi uniſoni prope tacti tremefiat tantum.

V I. So

VI. Sonus igitur uniſonus perfectiſſima eſt ſymphoniarum, propter correſpondentiam ictuum ejuſdem numeri, eſtque initium omnium conſonantiarum.

VII. Conſonantiæ conſiſtunt in proportionibus ſive rationibus commenſurabilibus, nam concordantia fit ex ictuum correſpondentia. Quare impoſſibile eſt ſonos incommenſurabiles concordare ſicut impoſſibile eſt, correſpondere tremores incommenſurabilium velocitatum.

VIII. Præcipui numeri generant ſymphonias concinniores unde poſt uniſonum $\frac{1}{1}$, proportio dupla $\frac{2}{1}$ quæ ſignificatur ab unitate & binario præcipuis numerorum, facit præcipuam conſonantiam & perfectam, quæ Diapaſon & octava.

IX. Tum proportio ſeſquialtera $\frac{3}{2}$ ſignificata per binarium & ternarium facit Diapente, ſive Quintam, non tantæ perfectionis: Quoniam in correſpondentia ſecatur integrum, cum unitas tardioris poſcat unum cum dimidio velocioris.

X. Deinde proportio ſeſquitertia $\frac{4}{3}$ conſiſtens in ternario & quaternario facit Diateſſaron ſive Quartam, adhuc minus ſuavem, adeo ut dubium ſit an conſonantiis ſit annumeranda. Cum ex Priſcis à Ptolomæo ſolo admittatur.

X I. Unde conſtat, quod multiplicitas pefectio- rem facit conſonantiam quam ſuperparticulari- tas, & præcipui numeri quam ſuccedentes. Nam ubi manifeſtior eſt ictuum correſponden- tia, ibi ſymphonia conſurgit ſuavior.

X I I. Diapente atque Diateſſaron differentia di- citur Tonus $\frac{9}{8}$ nam $\frac{4}{3}]\frac{3}{2}$ [$\frac{9}{8}$ vel ſic $\frac{9\,8}{1\,2}$, ratio ſeg- mentorum lineæ 12 eſt 9 ad 8 vel etiam ſic 3 2. 4. 3. multiplicatis binis rationibus $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$ eo quo in Schemate 8 proponitur modo, fien- tres illi numeri 12 6 continentes tres ra- tiones $\frac{9}{6}$ ſeſquial- 9 teram, $\frac{8}{6}$ ſeſquiter- tiam & $\frac{9}{8}$ ſeſquioctavam, quæ illæ duæ prio- res differunt atque idcirco eſt Tonus.

X I I I. Ditonus eſt ratio $\frac{9}{8}$ duplicata nempe $\frac{8}{6}$... diciturque tertia, eſtque $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8}$ vel invenitu- ſicut in Schemate 9. 8. 9. 8. Tertia & ſexta ſunt conſo- 81 72 64 nantiæ imperfectæ.

X I V. Diateſſaron & Ditoni, vel etiam Diapen- te & Tritoni differentia minor eſt quam dimi- dium Toni, quod intervallum Dieſis dicitur. Etque ratio $\frac{256}{243}$ Nam $\frac{81}{64}]\frac{4}{3}$ [$\frac{256}{243}$ Item $\frac{729}{512}]$ [$\frac{256}{243}$.

X V. Reliqua Toni pars dicitur Apotome. Eſtque ratio $\frac{2187}{2048}$ nempe $\frac{256}{243}]\frac{9}{8}$.

X V I. Apo-

XVI. Apotomes & Dieſios differentia dicitur comma: Eſtque ratio $\frac{531441}{524288}$ nempe $\frac{256}{243}$] $\frac{2187}{2048}$ neque enim Tonus per æqualia poteſt dividi; nam cum ipſius termini 9 & 8 non ſint ut quadratus numerus ad quadratum numerum medium proportionalem, qui proportionem per æqualia ſecet non habebunt

XVII. Eorum, quæ jam definita ſunt, computatio, tam numeroſa tam ſpecioſa per literas, poſitis A pro 3, Aq pro 9, E pro 2, Ec pro 8. ſic ſe habet.

Diapente $\frac{3}{2}$. $\frac{A}{E}$ Diateſſaron $\frac{4}{3}$. $\frac{E2}{A}$

Tonus $\frac{9}{8}$. $\frac{4}{3}$] $\frac{3}{2}$ [Diapente.
$\frac{E2}{A}$] $\frac{A}{E}$ [$\frac{A2}{E3}$ [Diateſſar.

Diapaſon $\frac{2}{1}$. $\frac{4}{3}$ in $\frac{3}{2}$ $\frac{\text{Diapente.}}{\text{in Diateſ.}}$

$\frac{E^2}{A}$. in $\frac{A}{E}$. $\frac{E^2}{E}$

Ditonus $\frac{81}{64}$. $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8}$ $\frac{\text{Tonus in}}{\text{Tonum.}}$

$\frac{A2}{E3}$. in $\frac{A2}{E3}$. $\frac{A4}{E6}$

Tritonus $\frac{729}{512}$. $\frac{81}{64} \times \frac{9}{8}$ - $\frac{\text{Ditonus in}}{\text{Tonum.}}$

$\frac{A4}{E6} \times \frac{A2}{E3}$ $\frac{A6}{E9}$

Dieſis

Dieſis $\frac{256}{243}$. $\frac{81}{64}$] $\frac{4}{3}$ [Diateſſar
Ditonus.

A4] E2 [E8
E6] A [A5

Vel

Dieſis $\frac{256}{243}$. $\frac{729}{512}$] $\frac{3}{2}$ [·Diapente
[Tritonus.

A6] A [E8
E9] E [A5

Apotome $\frac{2187}{2048}$. $\frac{256}{243}$] $\frac{9}{8}$ [·Tonus
[Dieſis.

E8] A2 [A7
A5] E3 [E11

Comma $\frac{531441}{524288}$ - $\frac{256}{243}$] $\frac{2187}{2048}$ [-Apotom:
[Dieſis.

E8] A7 [A12
A5] E11 [E19

XVIII. Diapente cum Diateſſaron continuata conſtituit Diapaſon nam $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$ eſt $\frac{2}{1}$ quæ etiam conſtat ex quinque Tonis & binis Dieſibus.

XIX. Dieſis major eſt quam tria commata, minor quam quatuor hoc eſt ratio $\frac{256}{243}$ major eſt quam ratio $\frac{531441}{524288}$ triplicata, minor quam eadem quadruplicata.

XX. Apotome major eſt quam quatuor commata minor quam quinque h, e, Ratio $\frac{2187}{2048}$ major eſt quam Ratio $\frac{531441}{524288}$ quadruplicata minor quam eadem quintuplicata.

XXI.

XXI. Tonus eſt major quam octo commata, minor quam novem hoc eſt Ratio $\frac{9}{8}$ major eſt quam ratio $\frac{531441}{524288}$ octuplata minor quam eadem noncuplata.

Hæ intervallorum collationes quamvis ſint veræ non tamen ex calculo Boetii, 3 Arithmeticæ, per differentias æquales conſequntur: nec quidem tenent in aſcenſione naturali ab imo ſive è chorda longiore gravioreque in breviorem atque acutiorem, ut in hoc ſubjecto calculo planiſſime patet.

	8888888888 ... 1111111111 Quan. toni	01213 dif. com.
Comma		
	9010162335 ... 0121273447 dif. com.	09704 octupla.
Apotome		
	9492187500 ... 0603298611 dif. Apo.	10917 noncu.
Dieſis		
	10000000000 ... 0507812500 dif. Dies.	

XXII. Toni ſeu Tropi, vel modi octo canendi, ſunt totidem intervallorum Diapaſon ſpecies, ſecundum diverſa exordia, uſumque nationum ſumptæ, nempe Dorius, Hypodorius, Phrygius, Hypophrygius, Lydius, Hypolydius, Mixolydius, Hypomixolydius. Duo autem tetrachorda conficiunt has ſeptem chordas habentia communem terminum in chorda media: In chordis ſuperioribus tetrachordi locantur quatuor modi qui dicuntur duces, Authentici ac præcipui Dorius, Phrygius, Lydius, Mixolydius: in chordis inferioris tetrachordi, ponuntur reliqui quatuor Modi, Subjugales, Plagales & Secundarii, Hypophrygius, Hypoly-

Octo

Octo modorum ſive modulaminum ratio & ordo.

Tetrachor. infr. Tetrach. Supr-
Plagal ſubjug. Authen. : Duces.

Chordarum ordo.			Chordarum nomina.	Septuplex varietas Poſitionum chordarum.	Modorum nomina.	Chordarum ratio.
	b□	tonus				
Septimus	a g	tonus	Nete Infer:	in tritono	Mixolydius	6
Quintus		tonus	Paranete Super	dies: altam	Lydius	6 $\frac{3}{4}$
Tertius	e	dieſis. tonus	Paranete infra	dies: altam	Phrygius	7 $\frac{1}{9}$
Primus.					Dorius	
	d		Meſe media	in ditono	Hypomixolydius	8
Octavus						
Sextus	c	tonus	Lichanos Super	dies: imam	Hypolydius	9
Quartus	b□	dieſis	Parhypate infra	dies: imam	Hypophry:	9 $\frac{13}{27}$
Secundus	a	tonus	Hypate Superior	in triton:	Hypodorius	10 $\frac{2}{3}$
	g	tonus	Proſlambanomenos *			12
	F	tonus				

diuſ

dius, Hypomixolydius ſinguli ſingulis authenticis per Diateſſaron ſubjacentes. Ita ut media chorda apud d ſuſcipiat Dorium Authenticum Hypodorii infimi apud a & Hypomixolydium ſubjugalem ſupremi mixolydii apud g. Modorum diſpoſitio imitatur ordinem planetarum in diebus Hebdomadæ nomen & dominium habentium. Formantur autem authentici a loco proprio aſcendendo per Diapente & Diateſſaron h: e: per Diapaſon; & inde tantundem deſcendendo. Plagales autem a ſede ſui quiſque authentici per Diapente aſcendunt & inde per Diapente ac Diateſſaron deſcendunt: unde rurſus per Diateſſaron aſcendunt, & in locum authenticorum ſimul deſinunt. Miſcentur tamen quandoque & aut deficiunt aut limites prætereunt ut artificibus placet.

XIII. Quod autem Ptolomæus Hypomixolydium apud ſequentem literam a, quæ octava eſt ab a infima: non videtur additio ſed tranſlatio Hypodorii ad eandem literam, eandemque poſitionem chordæ ſuperioris in tritono, quæ tranſlatio fieri poteſt in unoquoque modo: ſi ſurſum per Diapaſon transferatur ad eandem ſc. literam.

XIV. Ex his quæ jam tradita ſunt, liquet quod naturalis cantus non per anfractus incognitaſque proportiones, ſed per intervalla ex præcipuis numeris propagata procedit, id eſt per Tonum, ac Dieſin aſcendens invenit Dia-

teſſaron: percuſſoque alio Tono, Diapente terminat, adhuc per Tonum Dieſim & Tonum quæ eſt alia Diateſſaron Diapaſon totumque octochordum perficiat. Hic ergo vocatur legitimus & à natura conſtitutus ordo vocum, ſicut ratio dictat ideoque etiam vocatur Diatonicus, quia per Tonos & ſemitonia procedit. Qui proceſſus iterum atque iterum & deinceps infinities repetitus, ita binos Tonos & ſingulas Dieſes admittit: triplicato inter repetendum tono; ut octavo quoque loco habeatur Diapaſon.

XXV. Admiſſio autem triplicati Toni, etſi ad perficiendum ubique Diapaſon neceſſaria, dura tamen fuit canentibus, unde ad talem duritiem temperandam, Artifices diviſere tertium illum Tonum in ſemitonia: Itaque ablata ex tertio tono Dieſi, relinquitur Apotome, atque ita recipiuntur immediate tria ſemitonia. Hæc diviſio Toni in Dieſim & Apotomen per ſingulos etiam Tonos fieri poteſt, ſicut in cytharis cæteriſque inſtrumentis Muſicis fieri conſuevit.

XXVI. His notatis, patet quod ſicut naturalis cantus (ſive Diatonicus) procedit per binos tonos & ſingulas Dieſes: ita Tritonicus per tritonos, & Chromaticus per ſemitonia ſuaviora. Quæ tria ſunt cantilenarum genera. Chromaticum igitur genus mollius eſt cum (tertio tono in Dieſim & Apotomen diviſo) continuantur tria ſemitonia.

XXVII

XXVII. Icoſichordon Guidonis conſtat quatuordecim tonis : & quinque Dieſibus inter Ditonum ac Tritonum alternatim interjectis. Hoc autem conficiunt ſeptem hexachorda, ſingula ſc. per ſyllabas ſenas Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La, pronuntiata, ſeptenis repetitis literis & octavo quoque loco repetita eadem litera Diapaſon indicet. Jam ex ſeptem illis hexachordis primum quartum & ſeptimum incipiens apud g conſonantem duram, quoniam admittit tritonum, ex tali duritie, b□ quadrati durique nomen ſortitur. Secundum autem ac quintum, incipiens apud c mediam, quoniam per binos Tonos, ſingulaſque Dieſes legitime ac naturaliter procedit, vocatur Diatonicum, Tertium vero ac ſextum incipiens apud f aſpiratam, quoniam tertium tritoni tonum in Dieſim & Apotomen ad temperandam duritiem, partitur, ab ipſo b rotundo mollique nomen accepit. Item B litera eadem recepit Fa hexachordi mollis, & Mi hexachordi duri; ut tranſitus hic vitaretur a cantoribus, quod eſt intervallum Apotomes. At idcirco diverſificat figuram apud fa. b, rotundi, ut denotet facilitatem Chromaticam apud Mi b□ quadrati, ad ſignificandem tritonici generis duritiem.

XXVIII. Diviſio Toni in Dieſim & Apotomen in ſingulis Tonis, ſicut à peritiſſimis artificibus, & inſtrumentis fieri ſolet.

	gs	50000000000		
Apotome				
		533935546875	26696777	13348
Dieſis				
	F	5625	28125	140625
Dieſis				
	E	592592592592	29629630	14814
Apotome				
		6328125	31640625	15820
Dieſis				
	D	666666666667	33333333	16666
Apotome				
		7119140625	35595703	17797
Dieſis				
	C	75	375	1875
Dieſis				
	b□	790123456790	39506173	19753
Apotome B.				
	b	84375	421875	210937
Dieſis				
	A	88888888889	44444444	222222
Apotome				
		94921875	47460937	237305
Dieſis				
	G	100000000000	50000000	250000

XXIX.

XXIX. Hexachordum comprehendit ſimplices ſymphonias, ſc. uniſonum, ditonum, diateſſaron, diapente, hexachordum: h, e. Uniſoſonum, tertiam, quartam, quintam, ſextam. Hinc ratio hexaſyllabici contextus. Diapaſon atque Diſdiapaſon, his ſingulis continuata, generat compoſitas ſymphoniasejuſdem qualitatis in ordine ſecundo atque tertio, &c.

9]8[88888888 889. pro Tono.
256]243[94921875 000. pro Dieſi.
2187]2048[93644261 546. pro Apotome.
531441]524288]98654036 8545. pro Commate.

Icoſi-

Icoſichordum Guidonis.

148148		e	la		
166667		d	la Sol		tonu
187500		c	Sol fa		tonu
197530		b[]	mi		dieſi
210937		b	fa		tonu
222222		a	la mi re		
250000	+	g	Sol re ut		tonu
281250		f	fa ut Trito.		tonu
296296	-	e	la mi Chroma.		dieſi
333333		d	la Sol re		tonu
375000	+	c	Sol fa ut		tonu
395062		b[]	mi		dieſi
421875		b	fa		tonu
444444		a	la mi re		
500000		g	Sol re ut		tonu
562500	+	f	fa ut	Triton	tonu
592593		e	la mi	Chromaticum	dieſi
666667	-	d	Sol re		tonu
750000		c	fa ut		tonu
790123		b[]	mi	Diatonicum	dieſi
843750		b			tonu
888889	-	a	re		tonu
100000		g	ut	Tritonicum	tonu

Præcepta contexendi ſymphonias duarum aut plurium vocum.

I. Principia modulaminum debent exordium ſumere à conſonantiis perfectis quod non eſt neceſſarium.

II. Duæ perfectæ ejuſdem ſpeciei conſonantiæ non debent ſimul aſcendendo vel deſcendendo immediatæ poni.

III. Inter duas perfectas ejuſdem generis conſonantias diverſis vel conſimilibus motibus intenſas aut remiſſas, una imperfecta, ut tertia vel ſexta debet media conſtitui.

IV. Plures perfectæ & diſſimiles conſonantiæ aſcendentes poſſunt conſtitui: ut quinta poſt uniſonum octava poſt quintam.

V. Duæ perfectæ concordantiæ ſimiles poſſunt immediate poni modo diſſimilibus procedant motibus, ut ſi octava in acutam elevetur, altera acuta in grave remittatur, &c.

VI. Cantus, Tenor & gravis debent invicem eſſe contrarii in motu, ut ſi cantus aſcendat tenor deſcendat: & contra ſed id non eſt neceſſarium.

VII. Cantus & Tenor per contrarios motus ſuaviſſime tranſeunt ex ſexta in octavam: ex uniſono in tertiam & contra. Item è ſexta minore

nore in quintam alterius partis mota, reliqua ſtante, idemque de compoſitis intellige.

VIII. Cantilena in conſonantiam perfectam terminari debet.

IX. Diſcordantia in minimis notis poteſt concedi.

X. Tres voces quarum extrema per Diapaſon, media cum graviore per Diapente, cum acutiore per Diateſſaron ligantur, optime concordant ſicut & ab iis compoſitæ.

XI. Tetiarum aut decimarum ſimul aſcendentium aut deſcendentium jucundus eſt ac ſuavis proceſſus.

Tabula

Tabella proportiones Tonorum in tribus octavis comprehendens.

8]4]E	1200	e	600	e	300
F	1125	f	563	f	282
F♯	1062	f♯	532	f♯	266
+G	1000	g	500	g	251
G♯	950	g♯	475	g♯	237
A	900	a	450	a	225
B fa	850	b fa	425	b fa	212
B mi	800	b mi	400	b mi	200
C	750	c	375	c	188
C♯	707	c♯	352	c♯	177
D	666	d	333	d	167
D♯	634	d♯	316	d♯	158

è 150 &c.

Numeri iſti Mediani non ſunt veri: Tibiæ cujus diameter eſt 9, longitudo 15, æqualem efficere, cujus diameter ſit 5. Dic reciprocè.

Q: 5. Q: 9 :: 15. 48 6 long:

Si vero quæratur longitudo tibiæ quæ ſit $\frac{2}{3}$ prioris: Primo inveniatur longitudo tibiæ æqualis, ipſaque per $\frac{2}{3}$ multiplicetur.

Muſicalium Tonorum proportionem invenire in Cythara vel Teſtudine.

Dividatur linea juxta Tabellam ſuperiorem in Tonos E, F, F ♯, + G, G ♯, A, B fa, &c. ſumptoque centro in initio ejuſdem lineæ per ſingulos tonos duc arcus, tum cape circino di diſtantiam à ſuſtentaculo ad oram cui innituntur chordæ: & ſi Cythara ſit, diſtantiam illam in ultimo arcu ab E tono nota; ſi teſtudo ſit, in arcu quarto à fine à G tono, cui præfigitur +, ad finem è centro ducatur altera linea interſecans omnes arcus. Nam arcuum ab ipſo E vel G verſus centrum, inter duas illas lineas interceptorum ſubtenſæ dabunt juſtam tonorum a ſuſtentaculo diſtantiam, verum in teſtudine toni verſus partem ſuperiorem in manubrio paululum ſunt attollendi, idque propter chordarum, quæ tonos determinant craſſitiem.

In Organis Pneumaticis.

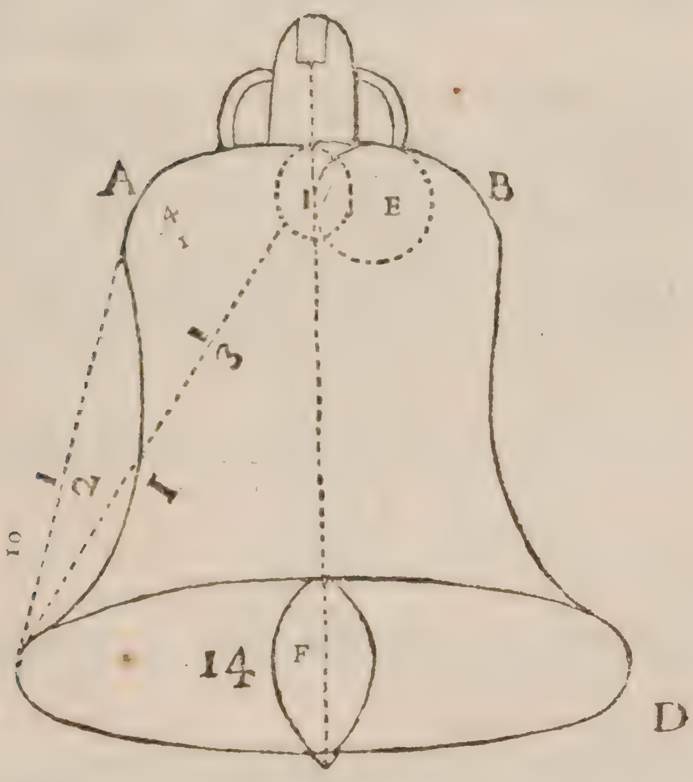
Omnes Organorum Pneumaticorum tibiæ conſtruuntur forma cylindri: pars enim illa quæ eſt a ſummitate uſque ad inferius foraminis labium, Cylindracea eſt, tonumque exprimit. Quare partes illæ ſecundum lineæ ſuperius diviſæ proportiones augendæ vel minuendæ erunt. Ut data tibia velim conſtruere aliam quæ ipſa inferior ſit tonis 5. Quia quintus tonus differt a primo in proportione 800 ad

1200

1200: ideo incipiendo ab inferiore foraminis labio, tibia deſiderata prioris ſeſquialtera conficienda eſt.

In Campanis.

Detur Campana ABCD cui velim ut alia ſimilis tono quarto inferior fiat: diviſa linea juxta tabellam ſuperiorem in tonos, ducantur



duo arcus, unus per E alter per A, in quo metieris circino ſubtenſas æquales diſtantiis

 CD,

CD, AB, AC, EF: tum e centro duces lineas totidem interſecantes reliquum arcum: & ſic habes dimenſiones Campanæ fabricandæ.

Nota quod Campana bene formata debet habere diametrum orificii 14 & latitudinem ſuperiorem AB 7: Et altitudinem interiorem EF 10: & altitudinem exteriorem AC 10 $\frac{1}{2}$ Et Craſſitiem juxta C 1 in ſummitate $\frac{1}{4}$ in medio $\frac{1}{3}$.

DE
Propugnaculorum Munitionibus.

MUnitio quantum loci commoditas tulerit debet eſſe ordinata quo capacior ſit ad recipienda militum tuguria, commeatus, aliaſque res tum militibus ſuſtentandis, tum hoſtibus arcendis neceſſarias.

Exemplum ſumatur in figura pentagona. Dividatur 360 gradus per 5, qui numerus eſt laterum, quotus erit 72 gradus, pro angulo ad centrum ACB. Angulum hunc tolle ex 180. Reliquus erit angulus figuræ BAP 108 gradus hujus dimidium eſt angulus BAC 54 gradus.

180
Exempl : 5) 360 (072 = ∠ ad centr :
2) 108 = ∠ figuræ
54 Semis.

480
Sumatur latus figuræ AB non minus quam 400
380

780 650
pedes, nec majus quam 680, puta 540 : Erit
600 530

325
AN 270 pedes. In triangulo igitur rectangu-
lo

lo NAC, datis angulo ACN 36 grad: & baſe AN; datur Hypotenuſâ AC 459 3516 pedes; & Cathetus CN 371 5231 pedes.

In pentagona arce $\frac{1}{2}$ ang. ACB = ACN = 36.
Ang CAN = 54 grad. ang. figuræ
SCo. CAN. Rad :: AN. AC :: S. ACN. Rad.
Rad. S. CAN :: AC. CN.

Tum ſtante aſtrolabio in Centro C (qui locus eligitur accomodatiſſimus pro medio arcis extruendæ) fiant quinque rectæ longæ 459 3516 pedes & continentes angulos 72 graduum. Et per terminos ipſarum rectarum, ductæ lineæ includent in campo pentagonum BAPOQ. Hoc pentagonum etiam examinabis, poſito aſtrolabio in angulo O: Nam ſi trium angulorum æqualium ipſi ACN latera incidant in puncta BAPQ, recte deſcriptum eſt pentagonum pro munitione facienda. At quo tutior ſit iſta munitio ab hoſtium incurſu, munitionibus communienda eſt hac arte.

In latere pentagoni AB abſcindatur utrinque linea *colli AG & BF, quæ ſit $\frac{2}{9}$ lateris*, nempe 120 pedes. Medium ſpacium inter GF quod eſt $\frac{5}{9}$ lateris, vel 300 pedes erit pro cortina.

At in quadrato latus eſt ad lineam colli ut 5 ad 1 & ad cortinam ut 5 ad 3 vel $\frac{3}{20}$ in □° vel $\frac{1}{5}$ in pentagono. &c.

Im

In punctis G & F extent ad angnlos rectos *GE DF alæ æquales* $\frac{1}{6}$ *lateris* nempe 90 pedum, At in quadrato $\frac{4}{25}$ lateris.

E punctis DE ducantur rectæ DH,EL, ſic ut angulus defenſionis interior DHF & ELG ſit triens ang^i BAC (ſextans ang BAP) nempe 18 grad: & angulus ad D vel E ejuſdem complementum nempe 72 grad: extendantur rectæ LE & HD donec concurrant cum lineis è centro CA & CB productis in I & K. Erit angulus EIA & DKB bes anguli BAC nempe grad: 36. Nam hæc regula eſt generalis, quod angulus propugnaculi 2EIA continere debet $\frac{2}{3}$ anguli polygoni 2 BAC, modo non excedat 90 gradus (quod primo fit in nonangulo) At vero in Nonangulo & reliquis plurium laterum figuris angulus propugnaculi 2 EIA ſemper debet eſſe rectus item angulus polygoni 2 BAC eſt ad angulum defenſionis interiorem ELG uſque ad octogonum ut 6 ad 1. poſt octogonum ratio paulatim decreſcit ita ut in dodecagono ſit ut 5 ad 1.

Ang: CAN - AIE = GLE. Ang: GEL = compl: GLE.

In octangula arce angulus propugnaculi eſt 90.

In Enneagono quidem ut 28 ad 5. In decagono ut 16 ad 3. In Hendecagono ut 26 ad 5.

In

In triangulo rectangulo plano EGL datis angulis cum latere EG, inveniatur baſis GL pedes 276 9915 & Hypotenuſa EL 291 2461 eſt igitur AL 396 9915.

Rad. t. GEL :: EG. GL.
S. GLE. Rad :: EG. EL.

In triangulo IAL datis tribus angulis cum latere AL inveniatur latus AI 208 7108 & IL 546 1941 pedes; eſt igitur IE facies propugnaculi 255 1658.

In triangulo AIL, datur GL & AG = $\frac{2}{9}$ lateris.
Quare Dic. SI. AL :: SA. IL :: SL. IA.

In triangulo rectangulo LMN, datis anglis MLN 18 grad: & LMN 72 grad. & baſe LN 126 9915 pedes invenietur hypotenuſa LM 133 5265: & cathetus MN 41 2620 quæ eſt diſtantia puncti defenſionis M a medio cortinæ.

In triang: MNL, datur ang: L & NL = GL --GN ($\frac{5}{18}$ lat)
Dic S.co. L. NL :: Rad. ML :: S,L. MN.

Tabula

Tabella continens munitionum regularium à Quadrato ad XII^gonum laterum & angulorum amplitudines : Sed diligentius examinanda juxta regulas jam antè traditas. } Belgicè

	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Semid: Polyg: CA	353	459	648	749	846	947	1048	1151	1400
Latus, Polyg: AB.	500	540	648	648	648	648	648	648	720
Cathet: Polyg: CN	250	372	561	673	783	890	997	1107	1343
Collum AG	100	120	144	144	144	144	144	144	160
Alæ GE, DF	80	90	90	108	108	108	108	108	120
Cortina GF	300	300	360	360	560	360	360	360	400
Alæ Cortinæ GH, LF		23	63	85	99	128	148	163	193
Capitalis AI	207	209	234	225	219	224	229	231	259
Faciei IE	256	255	279	260	247	244	242	239	261
Lin: defens: IL	565	546	594	555	529	499	479	463	501
Anguli.									
Centri ACB	90°	72°	60°	51°, 26	45° 00'	40°	36°	32° 44'	30°
Figur: polygæ. $\overline{2}$ BAC	90	108	120	128 34	135 00	140	144	147 16	150
Propugnacnli $\overline{2}$ AIE	60	72	80	85 43	90 00	90	90	90 00	90
Defendens lin: GLE	15	18	20	21 26	22 30	25	27	28 36	30
Alæ & faciei IEG	105	108	110	111 26	112 30	115	117	118 38	120
Capital: & lat: IAF	135	126	120	115 43	112 30	110	108	106 22	105
Defenſionis EMD	150	144	140	137 09	135 00	130	126	122 44	120

∴ 180 -- 2 AIE -- ELG Ang: BAC - AIE = GLE + 90.

Ad Pag. 175

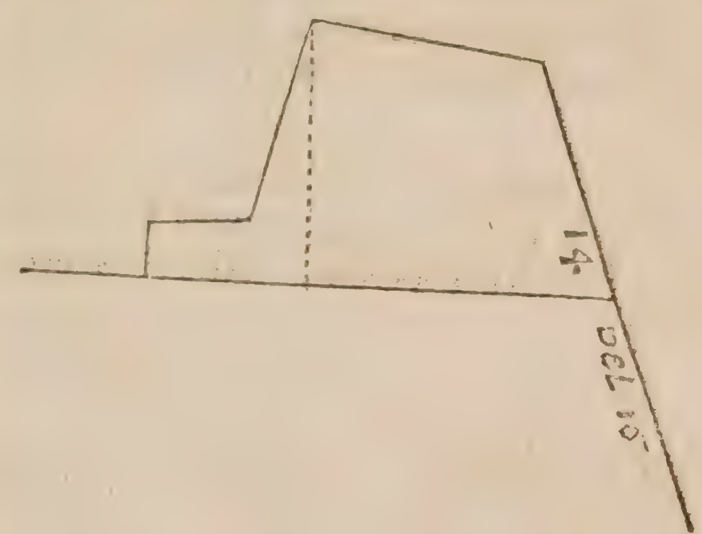
Vallum in Quadrato & Pentagono altum ſit 14 pedes.

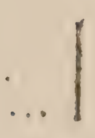
In Hexagono & heptagono 16 pedes.

Reclinatio valli exterior ad altitudinem eſto ut 2 ad 3; verum ſi terra congeſta ſit lenta tenaxque poterit eſſe ut 1 ad 2: Reclinatio valli interior ad altitudinem eſto ut 3 ad 2 ferè.



Alt: Recl: :: 3. 2 vel 2. 1 exterior.





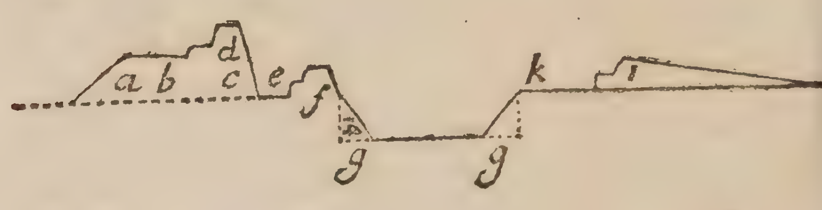
Alt: - Recl: :: 2, 3 vel 1. 2 Inter. ped. 30 ad 60.

Verticalis latitudo valli ad minimum eſto 30 pedum nec unquam excedat 60 pedes.

Thorax vallo ſuperſtructa *habeat exterius altitudinem 4 pedum, Reclinationem 2 pedum, at vero interius altitudinem habeat 6 pedum & Reclinationem 1 pedis & latitudinem verticalem 9 vel 12 pedum.* Huic *ſcabellum adjicitur altum 1 & latum* 2 ½ pedis.

Equites ſive Cavallieri ſunt colliculi qui nonnunquam excitantur inter duo propugnacula, vel ad angulum interioris polygoni, qui ſuper ſummum Thoracem eminent 5, 6 vel 7 pedes, ut eo commodius in campum proſpicere hoſtemque eminus offendere liceat: quibus vel Thorax vel ejus loco corbes loricolares imponuntnr.

Inter Imum vallum & foſſam relinquatur ſpatium latum. 12 18 22 pedes cujus extremo littori Thorax ſuperſtruitur, valli ipſius Thoraci ſimilis.



a b c Vallum.
a interior valli inclinatio Gall: Scharpe Ital: Scharpa.

c Exterior inclinatio Ital contras Scharpa, fioriſcharpa.
b Craſſities quadrang : valli.
d Thorax cum Scabello Gall : cortine Ital: parapetto.
e f Fauſſebraye Belg de berempte fulcrum valli.
e K viæ opertæ.
f Thorax parapetto.
14 Foſſæ profunditas,
Kl contre Scharpe.
L Thorax.

Foſſa circa totam munitionem excavetur, cujus in locis arenoſis & editioribus fundum æquetur verticali valli: ſuperficies ſive ſumma latitudo baſi, profunditas altitudini: inclinatio interior exteriori: exterior interiori: at in locis ſcaturiginoſis, petroſis vel declivioribus, ubi ad profunditatem 6, 8 vel 10 pedum effodiatur, riparum diſtantia ſit 160 & 180 pedum & conveniens profunditati inclinatio. Et ne primus hoſtium inſultus qui ſolet eſſe ferociſſimus huic machinæ ſoli incumberet, ſagaces homines, varias, quæ & ipſam munitionem communire poſſent, excogitaverunt munimentorum formas ab ipſo quidem opere ſejunctas, tutas tamen ſub alis propugnaculorum latentes, unde & hoſtem ferire, & à ſuis auxilium ferri commode poſſet; ſunt autem hujuſmodi,

Parmularum fa- brica hæc eſt { *Ital*: *Baſtinetto.* *Gal*: *Ravelins.* }

Ex medio cortinæ N perpendicularis excitetur & ex puncto ipſius R binæ facies egrediantur, pro ratione polygoni ab 144 ad 200 pedes: quarum defendentes lineæ medietati alæ polygoni reſpondeant: aut ſi non feret occaſio, diſtent ab alarum angulis 12 aut 20 ped: Parmulæque interior angulus S reſpondeat interiori foſſæ: cui muuimento foſſa 50 aut 60 ped: lata circumducta.

De Thorace contreſcharpe dicto.

In oppoſita campi planite, ſpatio 24 ped: (quam viam opertam nuncupare ſolemus) aſſumpto Thorax excitatur, cujus latera cum parmulæ faciebus continuo parallela: opus altum 6 pedes, ut ad 40 pedum latitudinem reclinet neceſſe habet; ſi latitudo minus arrideat, oculo ad apicem Thoracis machinæ majoris adplicato, recta collimabis ad extructam molem, donec ipſa campi planities in viſus radium incidat; ut hoc modo veram operis tui (ſcil: conterſcharpe) inclinationem aſſequaris. Ipſis propugnaculis ejuſmodi parmulas defenſionis ergo objiciunt, hoc modo.

De Parmulis propugnaculis objectis.

Ex Parmulæ cortinalis puncto T circiter 60 aut 50 ped:

50 ped : a foſſæ margine diſtante fiat recta TV parallela faciei propugnaculi: ſimiliter & ab V altera recta in altera propugnaculi parte & a puncto V utrinque binas facies 200 vel 220 pedes longas extrues: Parmulæque ſic factæ, pro ratione dimenſionum parmulæ cortinalis, foſſa, via operta, thoraxque circumducetur. Elatioreſque ſint hæ parmulæ, quam reliquum vallum 4 ped: quo commodius in hoſtes proſpicere liceat: neve ij qui ex operta via pugnant, lædantur a ſuis.

De opere Corniculato.

Corniculata dicuntur quod eorum latera ab ipſa munitione cornuum in morem extenſa promineant. Alæ propugnaculorum rectis lineis EX DY 700 pedes longis continuentur: quæ ſi longius extendantur hunc præſtabunt uſum, ut quidem verſus munitionem minui ſæpius, & quaſi in plura ſcindi poſſent propugnacula : At commoditas illa majori compenſari poteſt detrimento, dum a ſclopetariis ſuis propugnatores ægre defenderentur ; neque enim ultra 840 pedes in aliquem ſcopum glans ſclopeto dirigi certo poterit: longitudo itaque conveniens ſervetur; latera hujus operis æqualem cum alis præcipuæ munitionis ſortiantur diſtantiam: quæ ſi corniculata non ſuffecerit, obliquo tramite incidentes lineæ latitudinem acquirant commodiorem. Ad utrumque cornu propugnaculum extruitur dimidiatum, debito muni-

endum thorace quibus cortina æquali faciei junctis, tutum undequaque ab incurſu hoſtium redditur corniculatum: quæ propugnacula ſi vallo 4 aut 6 pedum parte interiori libeat communire; foſſa (nam & foſſam undequaque 24 ſive 36 ped: habere munimentum neceſſe eſt) pro valli modo accreſcere debet: ſin minus lorica, qualem cæteris prætexímus, ſuffecerit: Egregium hoc opus, verum propugnaculorum mucronibus præcipuæ munitionis commodè prætendi non poterit, ob anguſtam nimis inter cornua capacitatem, quæ propugnatores in periculum vitæ deduceret, ſuorum auxilio deſtitutos. Ala corniculati eſt æqualis ſemiſſi faciei ſuæ ſive cortinæ.

De Figuris inordinatis, & de oppidorum muniendi ratione —— Pleraque oppida & civitates rudis artiſque belli ignara antiquitas ad artis muniendi normam minime convenienter ſtruxerunt. Primo peripheriæ civitatis exacta vera & ichnographica requiritur deſcriptio. Univerſa namque civitatis muniendæ certitudo, ex angulorum debita inquiſitione dependet.

Deinde varias communiendæ civitatis formas depingito: quarum quæ commodiſſima, minimorumque futura ſumptuum eligatur: graviter cavendo ne propugnacula vallique immenſa moles uliginoſis locis extruantur. Neque tantopere regularitati figuræ inhærendum: Formæ quidem regularitas commodat, at debita

bita menſuræ proportio firmitatem munimento conciliat. Nam irregularis figura ſiquidem debite proportionata eandem quam regularis commoditatem ſuppeditabit. Angulus figuræ BAP non ſit minor recto, nam quo obtuſior eo commodior, Linea colli (Ital recinto) FB vel AG ſit 96 120 vel 144 pedum Alæ (Gall: Eſpaules) ſunto cortinæ perpend: ſitque earum longitudo 96 120 vel 132 ped: Angulus propugnaculi I vel K ne ſit minor gradibus 60 vel major quam 90.

Cortinæ longitudo 480, 720, 960.

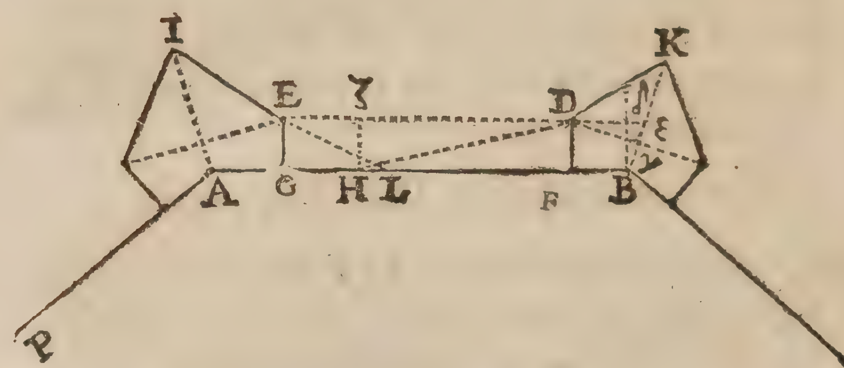
Ang: defenſionis exterior ELF vel DHG ſit obtuſus non excedens grad: 160, linea defenſionis DH vel EL ne excedat 960 pedes.

Vallum ad altitudinem 10, 18, 20. pedum extruatnr ſitque reclinatio valli interior urbem verſus æqualis altitudini, exterior reclinatio $\frac{2}{3}$ altitudinis.

In

In $\triangle^{o}$ $D\zeta H$ datur $H\zeta$ & $\angle D$, quæratur $D\zeta$ & DH.

In $\triangle^{o}$ $B\delta\varepsilon$ datur $B\delta$ & $\angle\varepsilon = \frac{1}{2}\angle B$ quæratur $\delta\varepsilon$ & $B\varepsilon$.



In $\triangle^{o}$ $D\gamma\varepsilon$ datur $D\gamma$ & $\angle\varepsilon$ quæratur $D\varepsilon$,

In $\triangle^{o}$ $D\varepsilon K$ datur $\angle\varepsilon$ & εK.

Latitudo verticalis valli a 30 ad 40 pedes. Baſis, &c.

Thorax altitudinis 6 pedum: latitudinis ad verticem 5, 9, 12, pedum reclinet introrſum 1 ped: extrorſum 2, quocirca baſis latitudo erit 8, 12, 15. pedes Scabelli altitudo 1 ped: latitudo 3.

Fulchrum valli (de Barempte relinquit ſpatium 12. 18. 22.

Foſſæ

Foſſæ latitudo minima 140, 160, 180 pedum.

Latitudo foſſæ ſic invenitur, latitudinem valli tum ad verticem tum ad baſim adde: ſummamque dimidiatam duc in altitudinem. Item latitudinem Thoracis tum ad verticem tum ad baſim adde, ſummamque ipſam dimidiatam duc in altitudinem. Factorum ſummam auctam quinta ſui parte, divide per profunditatem foſſæ, & quoto invento adde ſemiſſem profunditatis pro foſſæ latitudine ſuperiore: vel tolle pro latitudine inferiore.

Exemplum: Vallum ad verticem habeat latitudinem 32 pedes, ad baſim 55. ſummam dimidiatam $43\frac{1}{2}$ multiplica per altitudinem 14 pedes & fient 609 pedes. Item thorax ad verticem habeat 10 pedes, ad baſim 13, ſummam dimidiatam $11\frac{1}{2}$ multiplica per altitudinem 6 pedes & fient 69 pedes. Adde igitur 609 & 69 ſumma erit 678 pedes ipſam auctam quinta ſui parte 136. nempe 814 divide per 6 profunditatem foſſæ: quotus $135\frac{2}{3}$ auctus ſemiprofunditate. Erit $138\frac{2}{3}$ latitudo foſſæ ſuperior: ſed minutus ipſa erit $132\frac{2}{3}$ latitudo inferior. Additur autem $\frac{1}{5}$ quia terra effodienda quantitati valli non conveniet.

In oppidorum munitionibus propugnacula non habeant partes inæquales, ſed in ſingulis propugnaculis anguli extremi faciei atque alæ ſint æquales cujus negotii univerſa difficultas

 hæret

hæret in linea colli AG vel BF ut ut ergo inquiras quantum ea decurtari aut elongari debeat ut eadem propugnaculis forma maneat; ratio habenda eſt angulorum figuræ BAP; Quanto enim ſunt acutiores, tanto defendentes lineæ erunt longiores, & lineæ colli breviores.

Longitudo lineæ colli geometrice invenietur ſic: ab angulo alæ E ducatur recta parallela lateri figaræ AB, item alia recta parallela lineæ BK, diſtantiam habens æqualem puncti E a linea AI. E concurſu harum rectarum D, ala novi propugnaculi perpendiculariter in continam demittatur: fiatque ipſum propugnaculum ad B, partes habens æquales partibus propugnaculi prioris ad A. quod ſi angulus B nimis foret acutus, linea defenſionis DH enormis eſſet longitudinis: ad quod incommodum vitandum angulum propugnaculi K magis acutum, alaſque breviores efficies.

De iis quæ in munitionum quovis loco extructarum aut commodum aut detrimentum verti poterunt.

I. Munitionum in planitie horizontali extructarum commoda.

1° Pingue compactumque ſolum vallo, cæteriſque extructis idoneum eſt,

2° Si flumen haberi poſſet minimo ſumptu commeatus adferri poterit.

3° So-

3° Solnm fertile excultum victum ſuppeditat.

4° Si nimia quantitate rivus excreverit, aut cataractis, aut alio modo, circumjacentes agri in pernitiem hoſtium inundari poſſunt.

5to Talis ſitus ineptus eſt agendis cuniculis, tum propter aquoſitatem, tum quia hoſtis fodiens eminus conſpici poteſt.

6° Regularis forma haberi poteſt.

7° Moleſtum erit hoſti ſuas turmas tegere ne videantur.

Impedimenta.

1° Idem ſolum etiam hoſti thoracibus, munitionibus extruendis conveniens erit.

2° Fluvius etiam hoſtium copiis commeatum adportabit.

3° Agrorum fertilitas etiam hoſti inſerviet.

4° Hoſtis cataractæ ſive aggeris flumen cohibentis campos aqua obſidente uti poterit: & minore opus erit exercitu.

5° Hujuſmodi munitio, ni flumen obſtiterit, undequaque aſſultui obnoxia erit.

6° Sumptuoſa per ſe ſunt enormia propugnacula, magnamque valli molem foſſamque quam latiſſimam requirunt: adeo ut ipſa fere nihil ſuppeditet natura commodi, ac in montibus.

7° Humile depreſſumque ſolum facit ut ſæpiſſime magno cum diſpendio ſubſidant valla aut propugnacula; ad quæ reſarcienda maximi quandoque impenduntur ſumptus.

II° Munitionum in convexo montium extructarum commoda.

1mo Ipſa natura hanc circumnatis vallibus, cum ab incurſu hoſtum, tum è tormentis bellicis, tum cuniculis effodiendis tutatur.

2° Si glebæ quantitas ſuffecerit, minore & ſumptu & opera ipſa extruetur munitio: ac vel in devexo fieri poſſet, dum ſponte ſua loci commoditas vallum foſſas & propugnaculorum munimenta ſuppeditet.

3° Diſjectas invicem hoſtium copias teneat oportet, quod ſuppetiarum tempore moleſtiam pariet.

Impedimenta.

1° Sub montium cacumine latenter adrepens hoſtis vallium commoditate frui poterit ut munitionem ſine ſuorum clade adoriatur.

2° Commeatus non ſine magno ſumptu, ut architectis, ſic propugnatoribus, defertur.

3° Penuria aquarum plerunque laborant convexi montes.

4° Foſſoribus obnoxii.

5° Pluvia nimbiſque magis quam reliqui ſitus divexantur, cum friabile illic ſolum magis quam in planitie exiſtat.

6° Formæ commoditas ex voto non ſuccedit architecto.

III° Munitionum in mari extructarum commoda.

1° Si 1500 pedes a littore diſtent, à tormentis tutæ ſunt.
2° Foſſoribus non datur aditus.
3° Inſultus non patent ob continuam ſuppetiarum copiam.
4° Sumptuoſis non indigent propugnaculis.
5° Nec commeatu magno, nec numeroſo propugnatore indigent propter commoditatem portuum.
6° Incertos tormentorum nauticorum ictus non eſt quod ideo formident ob vacillentem navium curſum, quas tamen ipſi propugnatores lædere poſſunt.
7° Claſſe defendi munirique poſſunt in pernitiem hoſtium.
8° Nec equitum in his locis uſus conceditur.

Impedimentum.

Non tamen hac munitione patriæ fines tuto defendi poterunt dum periculoſum inde egredi eſſe conſtet.

IV° Munitionum in littore extructarum Commoda.

1 Sicut commodorum, de quibus in 5, 6, 7, 8. marinarum ſunt participes, ſic quoque eorundem

dem quo procul à mari in campi planitie.
2 Ut eas obſideat hoſtis & claſſe & exercitu opus habet.
3 Ex iiſdem patriæ fines terra marique defendere poſſis.

Impedimentum.

Verum ut nec hoſtem finitimum, ſic nec peregrini alicujus aſſultum, propter alluens mare, effugiet.

V. Munitionum in paludoſis locis extructarum commoda.

1 Ipſa palus, quæ ut equiti, ſic pedeſtribus copiis acceſſum negabit.
2 Nec valli immenſa mole, nec celſo opus propugnaculo.

Impedimenta.

1 Immodici ſumptus, dum vallum cæteraque extruuntur loco minus idoneo viz. ubi fundus moli ferendæ impar ſolumque nec quantitate nec qualitate operi reſpondens.
2° Teter quotidie exhalans vapor aerem inficiens infeſta lue in milites graſſabitur.
3° Parva manu minimiſque copiis obſidebit eas hoſtis, modo propugnaculo aliquo defenſoribus exitum præſcindat.
4° Generoſiſſimorum defenſorum alacritas ſi hoc limite detineatur, alibi te deficiet.

6° Muni-

6° Munitionum juxta foſſam aridam extructarum Commoda.

1° Propugnaculorum vicem ſuppeditabit: ut in triennali obſidione Oſtendæ: ubi magna copia defenſores in aridas eaſque derelictas foſſas irruentes, ferociſſimos hoſtium incurſus ſecuri quandoque averruncabant.

2 Fugitivo ut militi, ſic colono tuta præbet latibula.

3 Si lignis eam adimplere hoſtis ſtudeat tempore neceſſitatis exuri poterunt. Si terra lapidibus aliave materia, magnam horum copiam per opertas vias breviſſimo temporis ſpatio offerri poterunt.

4 Nec aer inſalubris in hiſce locis.

Impedimenta.

1 Si ulterioribus foſſæ oris hoſtis potiatur, obſeſſos inhibebit ne eorum pecora militeſve in ea deliteſcant.

2 Minimo negotio eam hoſtis implebit, effodiet cuniculos, aget loricales cophinos, propugnacula extruet ſeque omnibus modis contra defenſorum excuſſus communiet.

3 Propugnaculis, extructiſque ſuis munimentis paulatim adrepens hoſtis, vallum, propugnaculum, eruet & demolietur, jam defendentis anguli compos.

7° Mu-

7° Munitionum juxta foſſam navigabilem extructarum. Commoda.

1 Foſſoribus ad munitionem difficilis eſt aditus.
2 Teneat ulteriores hoſtis oras, non tamen in ipſa ſe foſſa ocultare poteſt.
3 Si aquam deducere tentat, ſæpenumero & tempus & laborem fallet.
4 Nec vallum nec propugnaculorum fundamenta munitiunculis ſuis appropinquabit ut ea latenter evertat.
5 Niſi ſtagnans aqua fuerit quicquid implendi gratia immiſerit, fluctuabit huc illuc.
6 At ſi gravis fuerit materia, profunditas foſſæ, ut impleatur, multum temporis abſumet.

Impedimenta.

1 Ne pontem navalem injiciat hoſtis.
2 Defenſoribus exitus non niſi per pontes patet.
3 Hyems in frigidis regionibus congelabit.

Commodiſſimæ igitur ſunt illæ foſſæ quæ pro re nata aquis impleri & denuo evacuari poſſunt.

Extruenda ſit munitio, loco quidem idoneo, verum tali, ubi impedimento tempore neceſſitatis collis impediens eſſe poterit, (alii collem majorem cupiunt.) Colli autem prætendatur cortina, ut ambobus angi queat angulis defendentibns, nam hoc melius eſt, quam ſi in colle extruatur propugnaculum.

Com-

Compendium delineationis Propugnaculi.

1 Latus figuræ AB non minus eſſe debet quam 480
600 pedes: & in maxima arce vix majus quam 780
900 pedes puta 680 vel 400 & 680, puta
500 800
540.
600.

2 Linea colli AG nec minor ſit quam $\frac{1}{5}$ lateris, nec major quam $\frac{2}{9}$. Cortina $\frac{5}{9}$.

3 Ala GE ſit $\frac{1}{6}$ lateris, at in quadrato $\frac{4}{25}$.

4 Vallum altum ſit 14 vel 16 pedes: reclinans exterius ſemialtitudine interius altitudine & paulo plus.

5 Latitudo valli ſuperior nec minor ſit quam 30 pedes nec major quam 60.

6 Thorax ſuper vallum, altus extra 4 pedes, cujus latitudo eſt $\frac{1}{3}$ latitudinis valli. Et ſcammum habeat altum 1 pedem, & latum 3 pedes fere.

7 Inter vallum & foſſam ſpatium ſit æquale $\frac{3}{5}$ latitudinis ſuperioris valli 18 & 36.

8 Extra vallum alter ſit thorax foſſæ proximus.

9 Foſſæ profunditas, ſi fieri poterit æquet altitudinem valli cujus ſectio perpendicularis excedat ſectionem valli & loricæ ſive thoracis, quinta ſui parte, habeat etiam foſſa utrinque ſuas reclinationes; unde latior eſt in ſummo quam in imo.

10 In omni propugnaculo, ſemiangulus figuræ CAB æquatur ſemiangulo propugnaculi AIE, plus angulo lineæ defenſionis & cortinæ ILA qui defendens dicitur.

11 In Belgico propugnaculorum deſcribendorum modo, ſemiangulus propugnaculi nunquam excedat ſemirectum.

Quare ſi triens anguli figuræ ſuperet gradus 45, rejiciuntur omnes qui ſuperſunt. In modo autem Italico, angulus propugnaculi augetur una cum angulo figuræ: non quidem proportionaliter: ſed tamen cum reſpectu quodam, ad angulos in arce minima, ſcil: quadrangula in qua ſemiangulus figuræ eſt 45, & ſemiangulus propugnaculi 30 quorum differentiam 15 (qui angulus eſt lineæ defenſionis & cortinæ addunt ſemper Itali ad ſemiangulum figuræ ut habeatur angulus integer propugnaculi.

Exemplum in arce Septangula.

Modus Belgicus.

180
7] 360 [051$\frac{3}{7}$
3] 2] 128$\frac{4}{7}$
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ 64$\frac{2}{7}$
$\frac{1}{2}$ ∠ propug: 42 $\frac{18}{21}$ $\frac{6}{7}$

Modus Italus.

180
7] 360 [051$\frac{3}{7}$
2] 128$\frac{4}{7}$
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ 64$\frac{2}{7}$
[45—30=15
2] 79$\frac{2}{7}$
39 $\frac{9}{14}$

Quare

Quare ang: lineæ
defens: & cortinæ &
ang lineæ defens: cum ala &c. per 10
$64\frac{2}{7}$ -- $39\frac{9}{14}$ = $24\frac{9}{14}$ ang: lin: def: & cort.

Exceſſus ſemianguli figuræ in arce data. ſupra 45; eſt etiam exceſſus ſemianguli propugnaculi in eadem arce ſupra 30.

Et exceſſus anguli lineæ defenſionis & cortinæ ſupra 15.

180
7] 360 [05 1 4 3
2] 128, 57 + ang: fig,
64, 29
- 45
2] 19, 29
9, 64 + | 9 64 +
30 | 15
39, 64 + 24 64 +
$\frac{1}{2}$ ∠ ad cent: + $\frac{1}{2}$ ∠
propug. = ∠ inter alam
& lin. defenſionis FDM.

180
7] 360 [05 1, 4 3
3] 2] 128, 57 + 15
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ 64, 29 64 29
$\frac{1}{2}$ ∠ propug. 42, 86 79, 29
Belgic: Ital:
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ - $\frac{1}{2}$ ∠ propug: = ∠ lin defens & cortin: cujus compl. eſt ∠ alæ & lineæ defenſionis.

Sunt in Propugnaculo 4 Angulorum genera.

1 Rectus Angulus.
2 Angulus Propugnaculi.

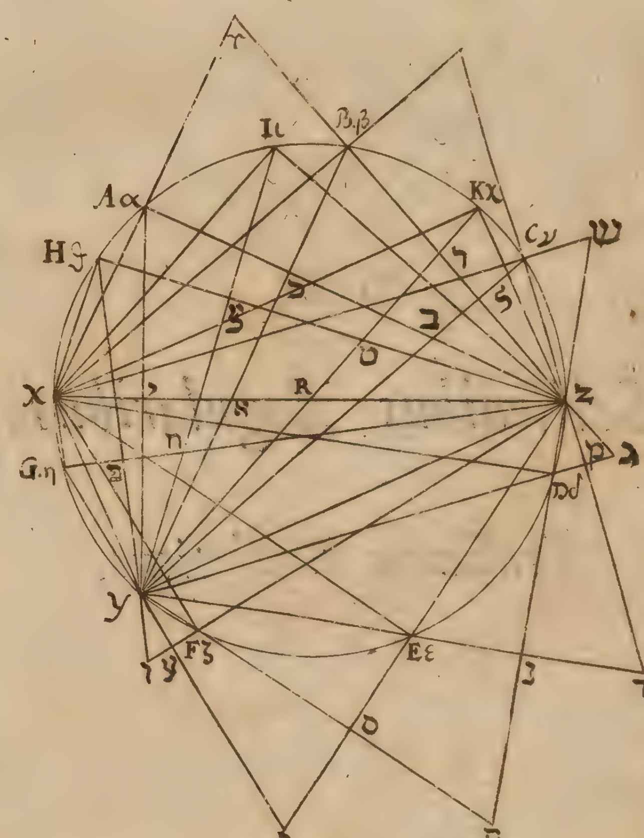
3 Angulus defenſionis DHF.
4 Angulus alæ FDK.

Diagonalium ratio ſic eſt.

1 s	45. R (DFN)	::latitudo. Diagonal.	1 Fα
2 s	$\frac{1}{2}$ < prop: R (BKD)		2 Kγ
3 s	< lin def: & cort: R)		3 DH
4 s	$\frac{90 - \text{< lin def: \& cor; R)}}{2}$		4 Dδ

Sectio-

DE
Sectionibus Angularibus
Tractatus Analyticus.



IN hoc tractatu fractiones ſic notantur D)N pro $\frac{N}{D}$ & quantitas intra curvam Denomina-tor eſt. Reliqua Numerator. ——

n Schemate R centrum eſt, XZ Diameter, & (peripheria YX = XA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IK &c. adeoque = YF = XG = AH = BI = CK &c. Et. ZC = ZD + XG &) *XA* ‖ *YB* : X*B* ‖ *YC* : X*C* ‖ *YD* : X*D* ‖ *YE* ‖ X*E* ‖ *YF* : X*F* ‖ *YG* : X*G* ‖ *YH* : X*H* ‖ *YI* : X*I* ‖ *YK*. *&c.*

*Quare perpendiculares ſunt rectæ. Y*י. *Z*י: *Y*כ. *Z*כ: *Y*ל. *Z*ל: *Y*מ. *Z*מ: *Y*נ. *Z*נ: *Y*ס. *Z*ס. *Y*ע. *Z*ע : *Y*פ. *Z*פ. *Y*צ. *Z*צ. *&c. Quæ ordine biſecant angulos æquales* X*RY*. *Scil: tam illos qui ad peripheriam duplæ Y*X *peripheriæ inſiſtunt quam angulos DZ*ג. *EZ*ד. *F*עו. *Nam* ∠ מ*Z*ג = *verticali BZC &* מ*ZD YDZ* - 1 *rect* = X*DY*. *Et ſimiliter* ∠ ע*Y*ו = *verticali GYH &* ע*YF* = *YFZ* - 1 *rect* = *YF*X *&c. Vel etiam propter quadrilaterum YCZD in circulo* ∠ *ZD*ג = *YCZ &c. item propter quadrilaterum ZGYF in circulo* ∠ *YF*ו = *ZGY &c.*

Quare

Quare Iſoſcelia ſunt tam Iſoſceli YRX quam inter ſe ſimilia.

Triangula.	*Quare illorum Baſes.*		
XYא : AZY	Xא	= ZX - Zא =	ZX - ZB
AYב : BZא	Aב	ZA - Zב	ZA - ZC
BYג : CZב	Bג	ZB + Zג	ZB + ZD
CYד : DZג	Cד	ZC + Zד	ZC + ZE
DYה : EZד	Dה	Zה - ZD	ZF - ZD
EYו : FZה	Eו	Zו - ZE	ZG - ZE
FYז : GZו	Fז	Zז - ZF	ZH - ZF
GYח : HZז	Gח	ZG - Zח	ZG - ZI
HYט : IZח	Hט	ZH - Zט	ZH - ZK

AY =	YA - oo.	
Bא	YB - Yא =	YB - YX
Cב	YC - Yב	YC - YA
Dג	Yג - YD	YB - YD
Eד	Yד - YE	YC - YE
Fה	Yה - YF	YD - YF
Gו	Yו + YG	YE + YG
Hז	Yז + YH	YF + YH
Iח	YI - Yח	YI - YG

Qua

Quæ cum perpendicularibus biſecentur in punctis י. כ. ל. מ. נ. ס. &c. *Si ſumantur illarum perpendicularium duplæ, erunt illæ baſes Iſoſcelium, angulum ad baſin habentium* = *RYZ adeoque ſimilium tam triangulo YZR quam inter ſe. Erit autem.*

Y'	=	YA + 00			2Z'	=	ZX + Zא	= ZX + ZB
Yכ		Yא + YB	=	YX - YB	2Zכ		ZA + Zב	ZA + ZC
Yל		Yב + YC		YA + YC	2Zל		ZB - Zג	ZB - ZD
Yמ		Yג + YD		YB + YD	2Zמ		Zד - ZC	ZE - ZC
Yנ		Yד + YE		YC + YE	2Zנ		Zה + ZD	ZF + ZD
Yס		Yה + YF		YD + YF	2Zס		Zו + ZE	ZG + ZE
Yע		Yו - YG		YE - YG	2Zע		Zז + ZF	ZH + ZF
Yפ	-	YH - Yז		YH - YF	2Zפ		Zח + ZG	ZI + ZG
Yצ		Yח + YI		YG + YI	2Zצ		Zט + ZH	ZK + ZH &c.

 Hiſce

Hiſce ſic conſtitutis clariſſime liquet eſſe.

I.

RY : YX   YX : Xא   YA : Aב
∷   : ZX-ZB. ∷   : ZA-ZC
R : A   A : 2R-β B : α-γ

YB : Bג   YC : Cד
∷   : ZB+ZD ∷   : ZE+ZC
C : β+δ D : ε+γ

YD : Dה   YE : Eו   YF : Fז
∷   : ZF-ZD ∷   : ZG-ZE ∷   : ZH-ZI
E : ζ-δ F : η-ε G : ϑ-ζ

YG : Gח   YH : Hט
∷   : ZG-ZI. ∷   : ZH-ZK.
H : η-ι I : ϑ-κ &c.

II.

RY : YX	ZA : AY.	ZB : Bא
::	: YA ::	: YB-YX
R : A	α : B-oo	ϐ : C-A
ZC : Cב	ZD : Dג	ZE : Eד
: YC-YA ::	: YB-YD ::	: YC-YE
γ : D-B	δ : C-E	ε : D-F
ZF : Fה	ZG : Gו	ZH : Hז
: YD-YF ::	: YE+YG ::	: YF+YH
ζ : E-G	η : F+H	ϑ : G+I
	ZI : Iח	
	: YI-YG	
	ι : K-H &c.	

III.

RZ : ZA	YX : YA.	YA : 2Yב
::	: YA. ::	: YX+YB
R : α	A : B+oo	B : A+C

YB : 2Yל	YC : 2Yמ	YD : 2Yנ
: YA + YC ∷	: YB + YD ∷	: YC + YE
C : B + D	D : C + E	E : D + F
YE : 2Yס :	YF : 2Yע	YG : 2Yפ
: YD + YF ∷	: YE - YG ∷	: YH - YF
F : E + G	G : F - H	H : I - G

YH : 2Yצ
: YG + YI.
I : H + K &c.

I V.

RZ : ZA	ZA : 2Zי	ZB : 2Zכ
∷	: ZX + ZB ∷	: ZA + ZC
R : α	α : 2R + β	β : $\alpha + \gamma$
ZC : 2Zל	ZD : 2Zמ	ZE : 2Zנ
: ZB - ZD ∷	: ZE - ZC ∷	: ZF + ZD
γ : $\beta - \delta$	δ : $\varepsilon - \gamma$	ε : $\zeta + \delta$
ZF : 2Zס	ZG : 2Zע	ZH : 2Zפ
: ZG + ZE ∷	: ZH + ZF ∷	: ZG + ZI.
ζ : $\eta + \varepsilon$	η : $\vartheta + \zeta$	ϑ : $\eta + \iota$

ZI :

$$ZI : 2Z\Upsilon$$
$$: ZH + ZK$$
$$\iota : \vartheta + \kappa \text{ \&c.}$$

Quatuor hæ propoſitiones primariæ ſunt, & augeri poterint in infinitum; ſumendo pro antecedentibus terminis chordas arcuum ſectionum incipientium ab initio Diametri, notatas literis majuſculis Latinis, in prima & tertia; vel chordas conjunctorum incipientium à fine Diametri notatas literis minuſculis Græcis in ſecunda & quarta: pro conſequentibus autem bimembribus chordas alternorum (i. e. trinque antecedenti proximorum) arcuum ſectionum, connexas ſigno + in tertia & ſigno — in ſecunda; ſive conjunctorum, connexas ſigno + in quarta & ſigno — in prima. *Hac tamen cautione* quod in prima & quarta ſi finis Diametri cadat in ſectionem mutatur ſignum ſolumodo quando ſectio ad finem Diametri eſt antecedens terminus rationis. Sed ſi cadat inter duas ſectiones mutantur ſigna in utraque. Verum in ſecunda & tertia ſi initium Diametri poſt revolutionem cadat in ſectionem, mutatur ſignum ſolumodo quando ſectio ad initium Diametri eſt antecedens terminus rationis, ſed ſi cadat inter duas ſectioner, mutantur ſigna in utraque ſicut patet propoſitiones ipſas atque Schema intuenti.

Ex

Ex his quatuor primariis propoſitionibus aliæ innumeræ oriuntur. Nos aliquot ponemus, eaſque quaſi in eodem ſemicirculo, ſine ſignorum mutatione: Reliquas analytices ſtudioſis relinquemus.

V. $R : A :: A : 2R - \beta :: \beta : C - A :: C : \beta - \delta :: \delta : E - C :: E : \delta - \zeta :: \zeta : G - E :: G : \zeta - \vartheta :: \vartheta : I - G$ -&c. Ex proceſſu. I^æ &. II^æ, mixtim.

VI. $2R : A :: R : \sqrt{q} : Rq\ \tfrac{1}{4}\ \alpha q :: \alpha : \sqrt{q}.\ \alpha q - \tfrac{1}{4} Q : 2R + \beta :: \beta : \sqrt{q}.\ \beta q - \tfrac{1}{4} Q : \alpha + \gamma :: \gamma : \sqrt{q}.\ \gamma q - \tfrac{1}{4} Q : \beta + \delta :: \delta : \sqrt{q}\ \delta q - \tfrac{1}{4} Q : \gamma + \varepsilon$ :: &c: ex proceſſu IV^æ. Item

VII. $2R : A :: A : \sqrt{q}.\ Aq - \tfrac{1}{4} Bq :: B : \sqrt{q}.\ Bq - \tfrac{1}{4} Q : A + C :: C : \sqrt{q} : Cq - \tfrac{1}{4} Q : B + D :: D : \sqrt{q}.\ Dq - \tfrac{1}{4} Q . C + E :: E : \sqrt{q}.\ Eq - \tfrac{1}{4} Q : D + F$ &c. Ex proceſſu. III^æ.

— *Nam pro* VI. eſt. $ZX : XA :: ZR : (\sqrt{q}.\ Rq - \tfrac{1}{4} ZAq.$ *vel*$)\ \sqrt{q}.\ ZRq - Q \tfrac{1}{2} ZA :: ZA : \sqrt{q}.\ ZAq - Z'q :: ZB : \sqrt{q}\ ZBq - Zℶq$ &c. *& pro* VII. eſt. $ZX : XA :: YX : (\sqrt{q}.\ YXq - \tfrac{1}{4} YAq$ *vel*$)\ \sqrt{q}.\ YXq : - Q : \tfrac{1}{2} YA :: YA : \sqrt{q}.\ YAq - Yℶq :: YB : \sqrt{q}.\ YBq$ — Yלq &c.

VIII. $2R : \alpha :: 2\alpha :: 2R + \beta :: 2\beta : \alpha + \gamma :: 2\gamma : \beta + \delta$ :: &c. ex proceſſu IV^æ.

I X.

IX. $2R : \alpha :: 2A : B + o :: 2B : A + C :: 2C : B + D ::$ &c. ex proceſſu III^{a}.

X.

$ZA : AX \quad :: \quad XB : B$ר $\quad :: \quad ZC : C$ר

$: Br \quad :: \quad : XC - Xr$

$\alpha : A \quad\quad B : 2R - \epsilon \quad\quad \gamma : C - 2A$

$XD : D$ש

$:: \quad : ZD$ plus $ZB - B$ר

$D : \delta + 2\epsilon - 2R :$

Nam ſimilia ſunt triangula rectangula XAZ : XBר : ZCר : XDש *&c. Dimidia Iſoſcelium ſimilium* XrZ, Xrר : Zשר : Xsש *&c.*

XI. Ex proceſſu III^{a} per interpretationem.

$R : \alpha :: A : R)\ \alpha A = B.$

$R : \alpha :: R)\ \alpha A : R^2)\ \alpha^2 A = A + C.$ quare mi. A erit.

$R^2)\ \alpha^2 A - R^2 A = C.$

$R : \alpha :: R^2)\ \alpha^2 A - R^2 A : R^3)\ \alpha^3 A - R^2 \alpha A = B + D.$ qu. mi. B.

$R^3)\ \alpha^3 A - 2 R^2 \alpha A = D.$

$R : \alpha :: R^3)\ \alpha^3 A - 2 R^2 \alpha A : R^4)\ \alpha^4 A - 2R^2 \alpha^2 A = C + E :$ mi. C.

$R^4)\ \alpha^4 A - 3 R^2 \alpha^2 A + R^4 A = E.$

$R^5)\ \alpha^5 A - 4 R^2 \alpha^3 A + 3 R^4 \alpha A = F.$

$R^6)\ \alpha^6 A$

$R^5) \alpha^6 A - 5 R^2 \alpha^4 A + 6 R^4 \alpha^2 A - R^6 A = G$
&c.

XII. Ex proceſſu IV^a per interpretationem.

$R : \alpha :: \alpha : R) \alpha^2 = 2R + \beta$ quare mi. $2R$
Erit.
$R) \alpha^2 - 2R^2 = \beta.$
$R : \alpha :: R) \alpha^2 - 2R^2 : R^2) \alpha^3 - 2R^2 \alpha = \alpha + \gamma$ qu. mi. α,
$R^2) \alpha^3 - 3R^2 \alpha = \gamma.$
$R : \alpha :: R^2) \alpha^3 - 3R^2\alpha : R^3) \alpha^4 - 3R^2\alpha^2 = \beta + \delta$: mi. β.
$R^3) \alpha^4 - 4R^2\alpha^2 + 2R_4 = \delta.$
$R^4) \alpha^5 - 5R^2\alpha^3 + 5R^4\alpha = \varepsilon.$
$R^5) \alpha^6 - 6R^2\alpha^4 + 9R^4\alpha^2 - 2R^6 = \zeta.$
$R^6) \alpha^7 - 7R^2\alpha^5 + 14R^4\alpha^3 - 7R^6\alpha = \eta$ &c.

Notandum autem eſt de propoſitionibus XI. XII. XIII. XIV. quod quibus in ſectionibus juxta cautionem poſt quatuor propoſitiones primarias traditam ſigna mutantur, & in earum etiam chordis ſigna omnia immutari debent.

XIII. Aliter ex proceſſu III^a per interpretationem.

$A : B :: B : A) B^2 : = A + C$. qu. mi. Erit.
$A) B^2 - A^2 = C.$
$A : B :: A) B^2 - A^2 : A^2) B^3 - BA^2 = B + D$ mi. B. Erit.
$A^2) B^3 - 2BA^2 = D.$

A : B

$A : B :: A^2) B^3 - 2BA^2 : A^3) B^4 - 2B^3A^2 :$
$= C + E$ qu. mi. C erit.
$A^3) B^4 - 3B^2A^2 + A^4 = E.$
$A^4) B^5 - 4B^3A^2 + 3BA^4 = F.$
$A^5) B^6 - 5B^4A^2 + 6B^2A^4 - A^6 = G.$ &c.

XIV. Per alternam factionem ex proceſſu I^a & II^a (*i. e. ex proceſſu* V^a) per interpretationem.

$R : A :: A : R) A^2 = 2R - \mathfrak{E} :$ qu: è 2 R: reſt:
$R) 2R^2 - A^2 = \mathfrak{E}.$
$R : A :: R) 2R^2 - A^2 : R^2) 2R^2A - A^3 = C$
$- A :$ qu: + A:
$R^2) 3R^2A - A^3 = C.$
$R : A :: R^2) 3R^2A - A^3 : R^3) 3R^2A^2 - A^4 =$
$\mathfrak{E} - \delta :$ qu: è: $\mathfrak{E}$. reſt:
$R^3) 2R^4 - 4R^2A^2 + A^4 = \delta.$
$R : A :: R^3) 2R^4 - 4R^2A^2 + A^4 : R^4) 2R^4A -$
$4R^2A^3 + A^5 : = E - C$ qu: + C:
$R^4) 5R^4A - 5R^2A^3 + A^5 = E.$
$R^5) 2R^6 - 9R^4A^2 + 6R^2A^4 - A^6 = \zeta.$
$R^6) 7R^6A - 14R^4A^3 + 7R^2A^5 - A^7 = G$ &c.

In his quatuor noviſſimis propoſitionibus, unciæ præfixæ affectionibus cujuſcunque æquationis ſunt numeri Radicales Triangulares, Pyramidales, Triangulo-triangulares, Triangulo-pyramidales, Pyramido-pyramidales, eoque deinceps ordine: In XI^a. quidem & XIII^a incrementum capiunt ab 1. in XII^a. & XIV^a a 2.

1					
2					
3	1				
4	3				
5	6	1			
6	10	4			
7	15	10	1		
8	21	20	5		
9	28	35	15	1	
10	36	56	35	6	
r.	t.	p.	tt.	tp.	pp.

Prop. XI. & XIII.

2					
3					
4	2				
5	5				
6	9	2			
7	14	7			
8	20	16	2		
9	27	30	9		
10	35	50	25	2.	
r.	t.	p.	tt.	tp.	pp.

Prop. XII. & XIV.

Et

Et in XII & XIV numerus ſectionum chordæ quæſitus in radicibus propriæ Tabellæ dabit uncias, at in XI & XIII. numerus ſectionum minutus binario.

Pro continuatione Tabularum nota quod inveniuntur triangulares collectis radicibus, pyramidales collectis triangularibus, triangulo-triangulares collectis pyramidalibus, &c.

Si quatuor ſeries continue proportionalium pro his quatuor propoſitionibus conſtituantur ſcil.

Pro. XI. $R : \alpha :: A : R) \alpha A : R^2) \alpha^2 A : R^3) \alpha^3 A : R^4) \alpha^4 A : R^5) \alpha^5 A : R^6) \alpha^6 A$ &c.

Pro. XII. $R : \alpha :: \alpha : R) \alpha^2 : R^2) \alpha^3 : R^3) \alpha^4 : R^4) \alpha^5 : R^5) \alpha^6 : R^6) \alpha^7$ &c.

Pro XIII. $A . B :: B : A) B^2 : A^2) B^3 : A^3) B_4 : A^4) B^5 : A^5) B^6 : A^6) B^7$ &c.

Pro. XIV. $R : A :: A : R) A^2 : R^2) A^3) : R^3) A^4 : R^4) A^5 : R^5) A^6 : R^{\prime}) A^7$ &c.

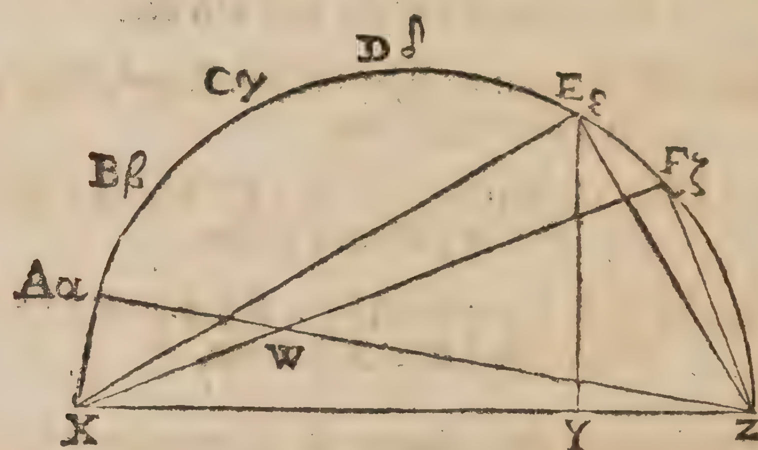
Proportionales illæ alternæ & alternatim affirmatæ atque negatæ cum unciis legitime affixis conficiunt ſingulas æquationes in unoquoque genere e. g.

In XII. $R^6)\,\alpha^7 - R^4)\,7\alpha^5 + R^2)\,14\alpha^3 - 7\alpha = n$: & in XIII. $A^4)\,B^5 - A^2)\,4B^3 + 3B = F$.

XV. In VII eſt. $2R : A :: A : V : A^2 - \frac{1}{4}B^2$: Eſt igitur $4R^2)\,A^4 = A^2 - \frac{1}{4}B^2$ Ideoque $R^2)\,4R^2A^2 - A^4 = B^2$. At vero per III. $B^2 = A^2 + CA$ Quare $R^2)\,4R^2A^2 - A^4 = A^2 + CA$ vel $R^2)\,3R^2A^2 - A^4 = CA$: & diviſa utraque æquationis parte per A erit. $R^2)\,3R^2A - A^3 = C$ Ergo.

$$R^2 : 3R^2 - A^2 :: A : C.$$

XVI. Si ab initio Diametri X ſumantur in ſemicirculo tres arcus, ſic ut aggregatum minimi & medii æquentur maximo $(A + E = F)$



ΔΔ *Rectangula ſimilia ſunt, ZYE XAW. XYE. XZE. FWZ. &c.*

Erit

Erit Primo. Rectangulum ſub Diametro & chorda maximi æquale rectangulo ſub chorda medii & chorda conjuncti minimo plus rectangulo ſub chorda minimi & chorda conjuncti medio.

Dico 1°. $2RF = E\alpha + A\varepsilon$ *&c. ut in XVI.*

Nam.

$$2RF = \frac{ZY \times XW}{A\varepsilon} + \left(\frac{XY \times XW}{AW \times E} \text{ plus } \frac{2R \times FW}{ZW \times E} = \right) E\alpha.$$

Erit ſecundo Rectangulum ſub Diametro & chorda conjuncti maximo, æquale rectangulo ſub chordis conjunctorum medio & minimo, minus rectangulo ſub chordis medii & minimi.

Dico 2° $2R\zeta = \alpha\varepsilon - AE$ *&c. ut in XVII.*

Nam. $ZX \times ZF. = (ZW \times ZE =) ZA \times ZE$ mi: $(ZE \times AW =) XA \times XE$.

Erit tertio Rectangulum ſub Diametro & chorda minimi æquale rectangulo ſub chorda maximi & chorda conjuncti medio minus rectangulo ſub chorda medii & chorda conjuncti maximo.

Dico. 3°. $2RA = F\varepsilon - E\zeta$ *&c. ut in XVIII.*

Nam. $E : \varepsilon :: F - XW : \zeta$: Quare $F\varepsilon - (\varepsilon \times XW =)$ $2RA = E\zeta$. &c.

Erit

Erit quarto Rectangulum ſub Diametro & chorda conjuncti minimo, æquale rectangulo ſub chordis conjunctorum maximo & medio, plus rectangulo ſub chordis maximi & medii.

Dico. 4°. $2R\alpha = \varepsilon\zeta + EF$ *&c. ut in* XIX.

Nam.

$$2R\alpha = \frac{ZY \times ZW}{\varepsilon\zeta} \text{plus}\left(\frac{XY \times ZW}{E \times FW} + \frac{2R \times AW}{E + XW}\right)EF$$

Erit quinto. Rectangulum ſub Diametro & chorda medii, æquale rectangulo ſub chorda maximi & chorda conjuncti minimo; minus rectangulo ſub chorda minimi & chorda conjuncti maximo.

Dico 5°. $2RE = F\alpha - A\zeta$: *&c. ut in* XX.

Nam per XVI *primò.* $2RG = F\alpha + A\zeta$ *& per* III *vel* IX $2RG + 2RE = 2F\alpha$ *Quare facta ſubductione Erit.* $2RE = F\alpha - A\zeta$.

Vel. ſic. per V. $2RG - 2RE = 2A\zeta$ *ex* $2RG = F\alpha + A\zeta$ *relinquit* $2RE = F\alpha - A\zeta$.

Erit ſexto. Rectangulum ſub Diametro & chorda conjuncti medio æquale rectangulo ſub chordis conjunctorum maximo & minimo, plus rectangulo ſub chordis maximi & minimi.

Dico

Dico 6°. $2R\varepsilon = \zeta\alpha + AF$ *&c. ut in* XXI.

Nam per. IV *vel viii.* $2R\varepsilon + 2Rn = 2\alpha\zeta$: tolle $2Rn = \alpha\zeta + AF$ *per* XVI. *Secundò. reſt*: $2R\varepsilon = \alpha\zeta + AF$.

Conſectarium. Si in tribus rectangulis triangulis planis (AZX : EZX : FZX :) angulus ad Cathetum ſecundi, plus angulo ad Cathetum primi æquetur angulo ad Cathetum tertii (√ EZX + √ AZX = √ FZX. *Nam Baſes voco chordas arcuum æqualiter creſcentium notatas literis Latinis majuſculis, & Cathetos chordas arcuum conjunctorum notatas literis minuſculis Græcis* :) Erit trianguli tertii, Hypotenuſa, ad Rectangulum ſub Hypotenuſis primi & ſecundi, : Sicut baſis ad rectangulum ſub baſe primi & Catheto ſecundi, plus Rectangulo ſub baſe ſecundi & Catheto primi: Et ſicut Cathetus, ad rectangulum ſub Cathetis primi & ſecundi, minus rectangulo ſub baſibus eorundem. Scil.

$$2R : 4R^2 :: F : A\varepsilon + E\alpha :: \zeta : \alpha\varepsilon - AE.$$

Nam oſtenſum eſt $2RF = A\varepsilon + E\alpha$. & $2R\zeta = \alpha\varepsilon - AE$ Eſtque idcirco. $2R : F :: 4R^2 : A\varepsilon + E\alpha$ &. $2R : \zeta :: 4R^2 : \alpha\varepsilon - AE$.

Nam (*univerſaliter*) Si ſit $AB = C^2$. multiplicando utrinque per A fiet $A^2B = AC^2$. Quare $A : B :: A^2 : C^2$.

Erit

Erit etiam Trianguli primi hypotenuſa ad rectangulum ſub hypotenuſis ſecundi & tertii : ſicut baſis ad rectangulum ſub baſe tertii , & catheto ſecnndi , minus rectang. ſub baſe ſecundi & catheto tertii. Et ſicut cathetus ad rectangulum ſub cathetis ſecundi & tertii plus rectang° ſub baſibus eorundem. Scil.
$2R : 4R^2 :: A : F\varepsilon — E\zeta :: \alpha : \varepsilon\zeta + EF.$

Nam oſtenſum eſt $2RA = F\varepsilon — E\zeta$ & $2R\alpha = \varepsilon\zeta + EF.$
Eſtque idcirco $2R : A :: 4R^2 : F\varepsilon — E\zeta$ &. $2R : \alpha :: 4R^2 : \varepsilon\zeta + EF.$

Erit denique Trianguli ſecundi Hypotenuſa ad rectangulum ſub hypotenuſis primi & tertii : Sicut Baſis ad rectangulum ſub baſe tertii & catheto primi , minus rectang° ſub baſe primi & catheto tertii : Et ſicut cathetus ad rectangulum ſub cathetis primi & tertii plus rectang° ſub baſibus eorundem. Scil $2R : 4R^2 :: E : F\alpha — A\zeta :: \varepsilon : \alpha\zeta + AF.$

Nam oſtenſum eſt $2RE = F\alpha — A\zeta$ & $2R\varepsilon = \alpha\zeta + AF.$
Eſtque idcireo $2R : E : : 4R^2 : F\alpha — A\zeta$ &. $2R : \varepsilon :: 4R : \alpha\zeta + AF.$

Synopſis

Synopſis Æquationum in Rectangulis quando arcus æqualiter creſcunt.

XVI. Primò.

$$2RB = A\alpha + A\alpha$$
$$2RC = A\beta + B\alpha$$
$$2RD = A\gamma + C\alpha$$
$$2RE = A\delta + D\alpha$$
$$2RF = A\varepsilon + E\alpha$$
$$2RG = A\zeta + F\alpha$$
$$2RH = A\eta + G\alpha$$
$$2RI = A\vartheta + H\alpha$$

&c.

XVII. Secundò.

$$2R\beta = \alpha\alpha - AA$$
$$2R\gamma = \alpha\beta - AB$$
$$2R\delta = \alpha\gamma - AC$$
$$2R\varepsilon = \alpha\delta - AD$$
$$2R\zeta = \alpha\varepsilon - AE$$
$$2R\eta = \alpha\zeta - AF$$
$$2R\vartheta = \alpha\eta - AG$$
$$2R\iota = \alpha\vartheta - AH$$

&c.

XVIII. Tertiò.

$$2RA = \left\{\begin{array}{l} B\alpha - A\beta \\ C\beta - B\gamma \\ D\gamma - C\delta \\ E\delta - D\varepsilon \\ F\varepsilon - E\zeta \\ G\zeta - F\eta \\ H\eta - G\vartheta \\ I\vartheta - H\iota \end{array}\right.$$

XIX. Quartò.

$$2R\alpha = \left\{\begin{array}{l} \alpha\beta + AB \\ \beta\gamma + BC \\ \gamma\delta + CD \\ \delta\varepsilon + DE \\ \varepsilon\zeta + EF \\ \zeta\eta + FG \\ \eta\vartheta + GH \\ \vartheta\iota + HI \end{array}\right.$$

XX. Quintò.

$$\begin{array}{l} 2RA \\ 2RB \\ 2RC \\ 2RD \\ 2RE \\ 2RF \\ 2RG \\ 2RH \end{array} = \begin{array}{l} B\alpha - A\beta \\ C\alpha - A\gamma \\ D\alpha - A\delta \\ E\alpha - A\varepsilon \\ F\alpha - A\zeta \\ G\alpha - A\eta \\ H\alpha - A\vartheta \\ I\alpha - A\iota \end{array}$$

XXI. Sextò.

$$\begin{array}{llllll}
2R\alpha & & \beta\alpha & + & AB \\
2R\beta & & \gamma\alpha & + & AC \\
2R\gamma & & \delta\alpha & + & AD \\
2R\delta & = & \varepsilon\alpha & + & AE \\
2R\varepsilon & & \zeta\alpha & + & AF \\
2R\zeta & & \eta\alpha & + & AG \\
2R\eta & & \vartheta\alpha & + & AH \\
2R\vartheta & & \iota\alpha & + & AI.
\end{array}$$

Ex harum ſex propoſitionum collatione innumeræ æqualitates oriuntur: Quales ſunt hæ.

XXII. Ex primò & ſecundò (*ſcil ex* XVI *&* XVII) per additionem.

$$\begin{array}{llllll}
2R \text{ in } B+\beta = & \alpha \text{ in } & A+\alpha \text{ plus } & A \text{ in } & \alpha - A \\
& \alpha & \alpha+A & A & \alpha - A. \\
2R \text{ in } C+\gamma = & \alpha \text{ in } & B+\beta \text{ plus } & A \text{ in } & \beta - B. \\
& \beta & \alpha+A & B & \alpha - A \\
2R \text{ in } D+\delta = & \alpha \text{ in } & C+\gamma \text{ plus } & A \text{ in } & \gamma - C. \\
& \gamma & \alpha+A & C & \alpha - A \\
2R \text{ in } E+\varepsilon = & \alpha \text{ in } & D+\delta \text{ plus } & A \text{ in } & \varepsilon - D \\
& \delta & \alpha+A & D & \alpha - A.
\end{array}$$

$$2R \text{ in } F + \zeta = \alpha \text{ in } E + \varepsilon \text{ plus } A \text{ in } \varepsilon - E.$$
$$\varepsilon \quad \alpha + A \quad E \quad \alpha - A.$$
$$2R \text{ in } G + \eta = \alpha \text{ in } F + \zeta \text{ plus } A \text{ in } \zeta - F.$$
$$\zeta \quad \alpha + A \quad F \quad \alpha - A.$$

&c.

XXIII. Ex quintò & ſextò (*ſcil. ex* XX *&* XXI) per Additionem.

$$2R \text{ in } A + \alpha = \alpha \text{ in } B + \beta \text{ plus } A \text{ in } B - \beta.$$
$$B \quad \alpha + A \quad \beta \quad \alpha - A.$$
$$2R \text{ in } B + \beta = \alpha \text{ in } C + \gamma \text{ plus } A \text{ in } C - \gamma$$
$$C \quad \alpha + A \quad \gamma \quad \alpha - A$$
$$2R \text{ in } C + \gamma = \alpha \text{ in } D + \delta \text{ plus } A \text{ in } D - \delta$$
$$D \quad \alpha + A \quad \delta \quad \alpha - A$$
$$2R \text{ in } D + \delta = \alpha \text{ in } E + \varepsilon \text{ plus } A \text{ in } E - \varepsilon$$
$$E \quad \alpha + A \quad \varepsilon \quad \alpha - A$$

&c.

XXIV. Et per utriuſque præcedentis comparationem.

$$\alpha \text{ in } A + \alpha \text{ plus } A \text{ in } \alpha - A = 2R \text{ in } B + \beta =$$
$$C + \gamma \quad C - \gamma$$
$$\alpha \text{ in } B + \beta \text{ plus } A \text{ in } \beta - B = 2R \text{ in } C + \gamma =$$
$$D + \delta \quad D - \delta$$
$$\alpha \text{ in } C + \gamma \text{ plus } A \text{ in } \gamma - C = 2R \text{ in } D + \delta =$$
$$E + \varepsilon \quad E - \varepsilon.$$

&c.

Atque

Atque hujuſmodi ratiocinatio per ſubductionem inſtitui poterit.

XXV. Ex tertiò & quartò *per tranſpoſitionem.*

$$\begin{array}{lcl} B \text{ in } \alpha + \gamma & = & \beta \text{ in } A + C. \\ C \text{ in } \beta + \delta & & \gamma \text{ in } B + D \\ D \text{ in } \gamma + \varepsilon & & \delta \text{ in } C + E \qquad \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} B \text{ in } C - A & = & \beta \text{ in } \alpha - \gamma \\ C \text{ in } D - B & & \gamma \text{ in } \beta - \delta \end{array}$$

XXVI. Ex tertiò & quartò per Additionem.

$$\begin{array}{llcll} B & \text{in } A + \alpha - C + \gamma & = & \beta & \text{in } A - \alpha + C + \gamma \\ C & B + \beta - D + \delta & & \gamma & B - \beta + D + \delta \\ D & C + \gamma - E + \varepsilon & & \delta & C - \gamma + E + \varepsilon. \end{array}$$

&c.

XXVII. *Et per utriuſque præcedentis comparationem.*

$$\begin{array}{lcl} A + C : \alpha + \gamma & :: & (B : \beta ::) \\ \quad A + C - \alpha + \gamma & : & \alpha + \gamma + A - C. \\ B + D : \beta + \delta & :: & (C : \gamma ::) \\ \quad B + D - \beta + \delta & : & \beta + \delta + B - D. \\ C + E : \gamma + \varepsilon & :: & (D : \delta ::) \\ \quad C + E - \gamma + \varepsilon & : & \gamma + \varepsilon + C - E \qquad \&c. \end{array}$$

XXVIII. *Ex* XXIV. *Tranſponendo & Reſoluta æqualitate in Analogiam.*

$$\left.\begin{array}{l} A+\alpha-C-\gamma : A-\alpha+C-\gamma : \\ B+\beta-D-\delta : B-\beta+D-\delta : \\ C+\gamma-E-\varepsilon : C-\gamma+E-\varepsilon : \\ D+\delta-F-\zeta : D-\delta+F-\zeta : \\ E+\varepsilon-G-\eta : E-\varepsilon+G-\eta : \\ F+\zeta-H-\vartheta : F-\zeta+H-\vartheta : \end{array}\right\} :: A : \alpha.$$

&c.

Hinc datis chordis arcus quintupli & tripli inveſtigari poterit chorda ipſius arcus: Et datis chordis arcus ſeptupli & quintupli inveſtigari poterit chorda arcus tripli &c. Nam,

$A+\alpha-C-\gamma$ in $C-\gamma+E-\varepsilon = A-\alpha+C-\gamma$ in $C+\gamma-E-\varepsilon$ factaque multiplicatione & æqualium expunctione. Erit A in $E-\gamma$ plus α in $C-\varepsilon = C^2 - C\varepsilon + E\gamma + \gamma^2$: Pro cognitis $E-\gamma$ ſumatur M. Pro $C-\varepsilon$ ſumatur N & pro $Cq - C\varepsilon + E\gamma + \gamma q$ ſumatur Pl. Eſtque $\alpha = \sqrt{}q: 4\,Rq - Aq$: Quare $MA + \sqrt{}q: 4\,Rq\,Nq - Nq\,Aq: = Pl.$ vel $4\,Rq\,Nq - Nq\,Aq = Plq - 2\,PLMA + Mq\,Aq$ vel $Mq + Nq)\,2\,PLMA: - Aq = Mq + Nq)\,Plq - 4\,Rq\,Nq$ &c.

Exem-

Exemplum prop: XII.

0.	R.	1, 0000000000.
I.	α.	1, 9400000000.
II.	R) α^2	3, 7636000000.
III.	$R^2) \alpha^3$	7, 3013840000.
IV.	$R^3) \alpha^4$	14, 1646849600.
V.	$R^4) \alpha^5$	27, 4794888224.
VI.	$R^5) \alpha^6$	53, 310208315456.
VII.	$R^6) \alpha^7$	103, 421804131984464.

R.	1,0000000.	Grad.	
α.	1,9400000.	14,069.	I.
β.	1,7636000.	28, 138.	II-2R:
γ.	1,4813840.	42,207.	III-3·I.
δ.	1, 1102849.	56, 276.	IV-4II+2R.
ε.	0, 6725688.	70,345.	V-5III+6I.
ζ.	0, 1944986.	84, 414.	VI-6IV+9II-2R.
η.	0,2952415.	98,483.	VII-7V+14III-7I.

Exem-

Exemplum prop : XIV.

o. R. 1, 0000000000.
I. A. 0, 2420000000.
II. $R)A^{2}$. 0, 0585640000.
III. $R^{2})A^{3}$. 0, 014172488.
IV. $R^{3})A^{4}$. 0, 003429742096.
V. $R^{4})A^{5}$. 0, 000829997587232.
VI. $R^{5})A^{6}$. 0, 000200859416110144.
VII. $R^{6})A^{7}$. 0, 0000486079786986 54848.

R.	1, 0000000	Grad.	
A.	0, 2420000	13,9.	I.
ϐ.	1, 9414360	27,8.	2R-II.
C.	0, 7118275	41,7.	3 I-III.
δ.	1, 7691737	55,6.	2R-4II + IV.
E.	1, 3819675	69,5.	6I-5III + V.
ζ.	1, 4933016	83,4.	2R-9II + 6IV-VI.
G.	1, 5013963.	97,3.	7I-14III + 7 V-VII.

XXIX. De

XXIX. De ſectionibus Angulorum: Et de quot lateribus æquatio quælibet angularium ſectionum inventa per propoſitionem XIV poterit explicari.

Quoniam eadem chorda inſervit tum arcui, tum complemento ejuſdem ad integrum circulum; æqualitas inter chordam ipſam & chordam ſegmenti arcus minoris pertinebit etiam ad chordam ſimilis ſegmenti arcus majoris. Inſuper pertinebit ad chordas aliarum ſectionum, quæ majorem minoremve in circulationibus componunt, ſemicirculum vero non excedunt: nempe ad chordam aggregati e ſegmento arcus dati tum minoris tum majoris, & ſimilis ſegmenti binorum quaternorum, ſenorum, &c. circulorum, modo aggregatum illud ſemicirculo non ſit majus: hoc eſt modo in triſectione minus ſit quam $3)1\frac{1}{2}$ vel $\frac{1,5}{3}$ in quinqueſectione quam $\frac{2,5}{5}$ in ſeptuſectione quam $\frac{3,5}{7}$ in nonuſectione quam $\frac{4,5}{9}$, in undecuſectione quam $\frac{5,5}{11}$ in tredecuſectione quam $\frac{6,5}{13}$, in quadragequintuſectione quam $\frac{22,5}{45}$ & ſic ulterius in infinitum.

Componere *arcum v. g.* XA *intelligit arcum quemcunque qui incipiendo ab eodem peripheriæ puncto* X *aliquoties (puta tredecies) ſumptus, circulatione facta in idem punctum A deſinit, talis eſt arcus* 13) *C* † X*A. cujus*

 trede-

tredecupli ſupra integrum circulum exceſſus, eſt ipſe arcus X*A*.

Binorum vero ſenorum &c. circulorum *dicit, quia ſi numerus circulorum ſit impar, ſigna omnia mutanda ſunt, ut ex adnotatis ad* XII *&* IV *hujus facillime colligitur.*

Exemplum ponam de tredecuſectione, in quo C ſignificat integrum circulum & N. arcum ſemicirculo minorem tredecuſecandum.

Eſt igitur 13)6 C + N minor ſemicirculo: effertur autem de radicibus ſeptem.

Chorda	Chorda
1. 00 + 13) N.	2. 13) C-N.
3. 13)2 C + N.	4. 13)3 C-N i.e. 13)2Cpl:C-N
5. 13)4 C + N.	6. 13)5 C-N. i.e. 13)4Cpl:C-N

7. 13)6 C + N- qui ſemicirculo minor eſt quia N minor $\frac{1}{2}$ C.

Atque hinc ſequitur quod in triſectione & quadriſectione ſolutio erit duplex: in quintuſectione & ſextuſectione triplex: in ſeptuſectione & octuſectione quadruplex: in nonuſectione & decuſectione quintuplex: in undecuſectione & duodecuſectione ſextuplex: &c. qui numerus in ſingulis æqualis eſt ſemiſſi paris imparem proxime ſequentis: quare in quadragequintuſectione erit vigetriplex.

XXX.

XXX. Latus homogeneum differentiæ quadratorum a partibus poteſtatis cujuſque eſt differentia quadratorum a nominibus radicis. At ſi ſpecies in partibus poteſtatis cujuſque collectæ ipſæ etiam alternatim affirmentur & negentur latus homogeneum ſummæ quadratorum ex iis eſt ſumma quadratorum a nominibus radicis. Exempli gratia.

C: Aq-Eq = Q: Ac + 3 AEq mi: Q : 3 AqE + Ec.
C: Aq+Eq = Q: Ac - 3 AEq pl: Q: 3 AqE-Ec.

Eſt prop: 4. cap. 17. Clavis Math. *quam conſule cum pluribus quæ huc ſpectant, ibidem & in fine* Cap. 16. *demonſtratis. Nam in* Cap. 16. *prop.* 14. *quod appellatur triangulum ſimplum, bicompoſitum, tricompoſitum, quadricompoſitum &c. eſt triangulum anguli ſimpli, dupli, tripli, quadrupli, &c.*

Hinc multæ oriuntur chordarum in angularibus ſectionibus ſimilitudines.

Chorda arcus: & complementi ad ſemicirculum: Hypotenuſa quæ & Diameter.

Duplic.

$Q: H^2 — \alpha^2: 2H\alpha.$ $H^2 + \alpha^2.$

Triplic.

$C: H^2 — \alpha^2: 3H^2\alpha + \alpha^3$ $H^3 + 3H\alpha^2$

$\sqrt{}2$ Quadrup.

$QQ: H^2 — \alpha^2$ $4H^3\alpha + 4H\alpha^3$ $H^4 + 6H^2\alpha^2 + \alpha^4$

Quintup.

$QC: H^2 — \alpha^2$ $5H^4\alpha + 10H^2\alpha^3 + \alpha^5$ $H^5 + 10H^3\alpha^2 + H\alpha^4$

Duplic.

$Q: H^2 — A^2: 2HA$ $H^2 + A^2$

Triplic.

$C: H^2 — A^2; 3H^2A + A^3$ $H^3 + 3HA^2$

$\sqrt{}^2$: Quadrup.

$QQ: H^2 — A^2: 4H^3A + 4HA^3$ $H^4 + 6H^2A^2 + A^4$

Quintup.

$QC: H^2 — A^2: 5H^4A + 10H^2$ $H^5 + 10H^3A^2 + 5$
$[A^3 + A^5$ $[HA^4$

$2\alpha A.$ $\alpha^2 — A^2$ $Q: \alpha^2 + A^2 = H^2$

$3\alpha^2 A - A^3$ $\alpha^3 - 3\alpha A^2$ $C: \alpha + A^2 = H^3$

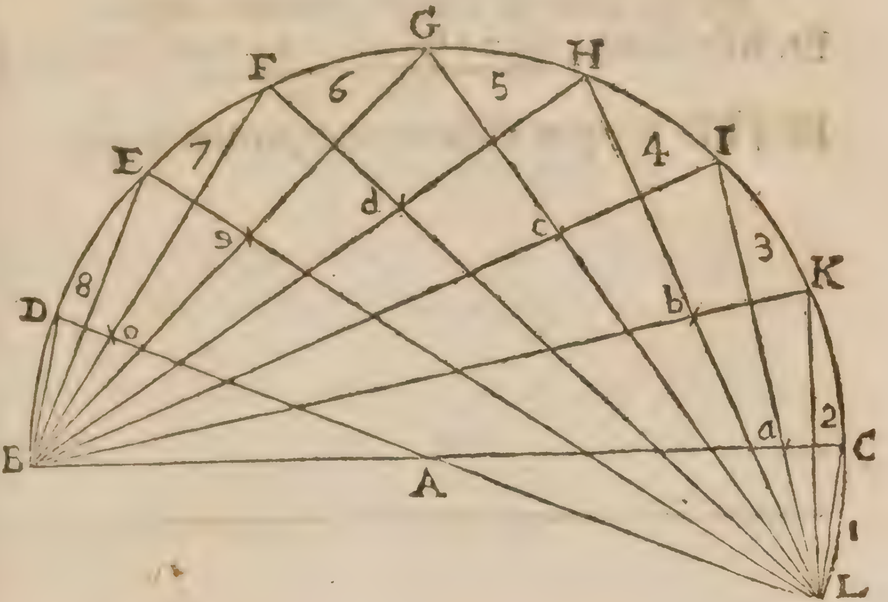
$4\alpha^3 A - 4\alpha A^3$ $\alpha^4 - 6\alpha^2 A^2 + A^4$ V^2 $QQ: \alpha^2 + A^2 = H^4$

$5\alpha^4 A - 10\alpha^2 A^3 + A^5$ $\alpha^5 - 10\alpha^3 A^2 + 5\alpha A^4$ $QC: \alpha^2 + A^2 = H^5$

XXXI.

XXXI. Si ſemicirculus ſecetur in quotlibet æquales partes & chordæ ducantur, Erit.

$A : 2R :: 2R + A + \alpha :$ chordæ omnes.



$BD = LC = 1$.
$BF = LI = LC + Ia = 1 + \text{bis } 3$.
$BH = LG = LI + Gc = 1 + \text{bis } 3 + \text{bis } 5$.
$BK = LE = LG + Ee = 1 + \text{bis } 3 + \text{bis } 5 + \text{bis } 7$.

$BE = LK = \text{bis } 2$.
$BG = LH = LK + Hb = \text{bis } 2 + \text{bis } 4$.
$BI = LF = LH + Fd = \text{bis } 2 + \text{bis } 4 + \text{bis } 6$.
$\text{Diameter} = LF + Do. = \text{bis } 2 + \text{bis } 4 + \text{bis } 6 + \text{bis } 8$.

BD

BD = 1 : Diam :: 2 : BK :: 3 : BI :: 4 BH ::
:: 5 : BG :: 6 : BF :: 7 : BE :: 8 : BD :

Quare.

$$BD : Diam :: \frac{1 + bis\ 3 + bis\ 5 + bis\ 7}{BD \quad + \quad BK} : Diam : + BI + BG +$$

BE bis. quæ eſt ſumma parium dupla.

$$Et.\ BD : Diam :: \frac{bis\ 2 + bis\ 4 + bis\ 6 + bis\ 8}{Diameter.} : BK + BH$$

BF + BD bis quæ eſt ſumma imparium dupla.

F I N I S.

Errata ſic Corrige.

PAg. 9. lin. 16. Sic $\frac{22}{10}$. p. 11. l. 14. Ergo K $\gtrdot$ H. p. 13. l. 9. libræ. l. vectis. p. 16. l. 10. minore. l. 11. majore. p. 19. l. 2. 3. 5. p. 23. N. 1. hujus. l. vectis. N. 2. pro 2. 3. l. 3. 4. p. 60. l. 9. aut l. autem p. 63. l. 19. 1,74. p. 140. l. 6. LK. p. 143. l. 9. $\frac{1}{3}$: 1. p. 147. Mx : Nx. p. 149. l. 9. $\alpha\zeta$. p. 174. S, I. S, A. S, L. p. 184. l. 13. cortinam.